

Obliczanie elementów elips błędów

W pracy [1] w przejrzysty sposób przedstawiono teorię elips błędów charakteryzujących dokładność wyznaczenia punktów. W szczególności wyprowadzono wzory umożliwiające obliczenie elementów określających wielkość (półosie A i B) i orientację (kąąt φ) elipsy błędu punktu wyznaczanego pojedynczo:

$$A = \frac{m_0}{|t_1|} \sqrt{2s}, \quad (1)$$

$$B = \frac{m_0}{|t_2|} \sqrt{2s}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]}, \quad (3)$$

gdzie

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [aa] \\ 2[ab] \\ [bb] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi - \cos\varphi \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

We wzorach tych $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$ są współczynnikami równań normalnych, w których jako niewiadome występują poprawki współrzędnych punktu wyznaczanego, m_0 jest błędem średnim pojedynczego spostrzeżenia, zaś s — parametrem uzależniającym wielkość półosi od prawdopodobieństwa położenia punktu wewnątrz elipsy. Wykazano, że prawdopodobieństwo to wyraża się wzorem

$$W = 1 - e^{-s^2}, \quad (5)$$

z którego wynika, że dla najczęściej stosowanej elipsy błędu średniego $W \simeq 0,39$ przy założonym $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Przyjmując natomiast $W = \frac{1}{2}$ (elipsa prawdopodobna) otrzymuje się $s \simeq 0,8325$.

W sieci wielopunktowej elipsę błędu punktu P , którego odcięta jest i -tą a rzędna k -tą niewiadomą układu równań normalnych, zdefiniowano jako elipsę błędu punktu wyznaczonego pojedynczo z układu 2 równań normalnych o krakowianie współczynnikowym

$$\begin{Bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ki} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}^{-1} \quad (6)$$

gdzie Q_{ii} , $Q_{ik} = Q_{ki}$, Q_{kk} są elementami odwrotności krakowianu współczynników równań normalnych sieci wielopunktowej.

Definicja ta jest w pełni uzasadniona pojęciowo. Wynika z niej bowiem, że przy ustalonym m_0 błąd średni dowolnej funkcji F współrzędnych punktu P wyznaczonego z sieci

$$m_F^2 = m_0^2 \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ki} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

równa się błędowi średniemu tej funkcji obliczonemu przy założeniu, że współrzędne punktu wyznaczone są z układu 2 równań normalnych o krakowianie współczynnikowym (6)

$$m_F^2 = m_0^2 \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

gdyz na mocy definicji

$$\begin{Bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ki} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Inaczej mówiąc, punkt wyznaczany pojedynczo z układu równań normalnych o krakowianie (6) może być pod względem dokładnościowym w pełni identyfikowany z punktem P sieci wielopunktowej.

Podana definicja narzuca również sposób obliczania elementów elipsy błędu punktu wyznaczonego w sieci, polegający na zastosowaniu wzorów (1)—(4) dotyczących elipsy błędu punktu wyznaczonego pojedynczo, po uprzednim obliczeniu współczynników $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$ krakowianu (6). Tego rodzaju postępowanie jest jednak dość pracochłonne. Opierając się na wzorach (1)—(4) wyprowadzimy wzory dogodniejsze w praktyce.

Na podstawie (6) otrzymamy:

$$[aa] = \frac{Q_{kk}}{D}, \quad [ab] = -\frac{Q_{ik}}{D}, \quad [bb] = \frac{Q_{ii}}{D}, \quad (10)$$

$$D = Q_{ii}Q_{kk} - Q_{ik}^2, \quad (11)$$

co pozwala na przedstawienie (3), (4) w postaci

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]} = \frac{2Q_{ik}}{Q_{ii} - Q_{kk}}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} [aa] \\ 2[ab] \\ [bb] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} Q_{kk} \\ -2Q_{ik} \\ Q_{ii} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi & -\cos\varphi \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Podstawiając dalej t_1 i t_2 wyrażone przez (13) do (1) i (2) napiszemy następujące wzory na kwadraty półosi elipsy

$$A^2 = m_v^2 s^2 \frac{2D}{Q_{kk} \cos^2 \varphi - 2Q_{ik} \cos \varphi \sin \varphi + Q_{ii} \sin^2 \varphi} \quad (14)$$

$$B^2 = m_v^2 s^2 \frac{2D}{Q_{kk} \sin^2 \varphi + 2Q_{ik} \cos \varphi \sin \varphi - Q_{ii} \cos^2 \varphi} \quad (15)$$

Wprowadzimy teraz oznaczenia:

$$X = Q_{ii} - Q_{kk}, \quad (16)$$

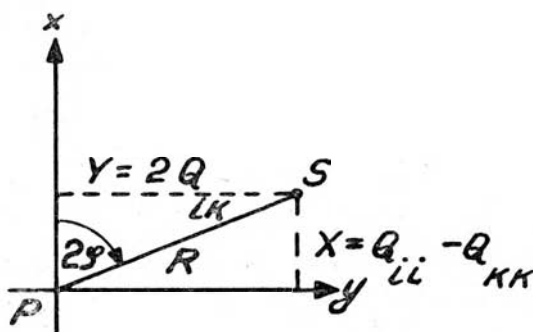
$$Y = 2Q_{ik}, \quad (17)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (18)$$

zgodnie z którymi wzór (12) przybierze postać

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{Y}{X}. \quad (19)$$

Będziemy traktowali X, Y jako współrzędne pewnego punktu S w układzie, którego początek znajduje się w punkcie wyznaczanym P , zaś osie są równoległe do osi układu przyjętego do wyrównania. Kąt 2φ określimy jednoznacznie przyjmując, że jest on kątem kierunkowym (azymutem) odcinka prostej PS .



Rys. 1

Wynikają stąd następujące wzory

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi &= \frac{Y}{R}, \quad \cos 2\varphi = \frac{X}{R}, \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{X}{2R}, \\ \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{X}{2R}. \end{aligned} \quad (20)$$

Podstawiając funkcje $\sin 2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ podane wzorami (20) do (14) i (15) otrzymamy

$$A^2 = m_0^2 s^2 \frac{2D}{\frac{1}{2}(Q_{ii} + Q_{kk}) - \left[\frac{X}{2R}(Q_{ii} - Q_{kk}) + \frac{Y}{R}Q_{ik} \right]},$$

$$B^2 = m_0^2 s^2 \frac{2D}{\frac{1}{2}(Q_{ii} + Q_{kk}) + \left[\frac{X}{2R}(Q_{ii} - Q_{kk}) + \frac{Y}{R}Q_{ik} \right]}.$$

Wyrażenie ujęte w mianownikach nawiasami kwadratowymi równa się $\frac{R}{2}$. Mamy bowiem

$$\frac{X}{2R}(Q_{ii} - Q_{kk}) + \frac{Y}{R}Q_{ik} = \frac{X}{2R}X + \frac{Y}{R}\frac{Y}{2} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}.$$

W związku z tym

$$A^2 = m_0^2 s^2 \frac{4D}{Z - R},$$

$$B^2 = m_0^2 s^2 \frac{4D}{Z + R},$$

gdzie

$$Z = Q_{ii} + Q_{kk}. \quad (21)$$

Nietrudno sprawdzić, że

$$4D = (Z + R)(Z - R), \quad (22)$$

ponieważ

$$\begin{aligned} (Z - R)(Z + R) &= Z^2 - R^2 = (Q_{ii} + Q_{kk})^2 - (Q_{ii} - Q_{kk})^2 - (2Q_{ik})^2 = \\ &= 4Q_{ii}Q_{kk} - 4Q_{ik}^2 = 4(Q_{ii}Q_{kk} - Q_{ik}^2) = 4D. \end{aligned}$$

Uwzględniając (22) otrzymamy ostatecznie

$$A = m_0 s \sqrt{Z + R} \quad (23)$$

$$B = m_0 s \sqrt{Z - R}. \quad (24)$$

Z postaci wzorów (23), (24) widać, że półoś A o kącie kierunkowym φ obliczonym według (19) jest większą półosią elipsy ($A \geq B$).

Do obliczenia elementów elipsy służą bezpośrednio wzory (16), (17), (18), (19), (21), (23), (24), które wypiszemy jeszcze raz w kolejności ich stosowania:

$$\begin{aligned}
 X &= Q_{ii} - Q_{kk} \\
 Y &= 2Q_{ik} \\
 Z &= Q_{ii} + Q_{kk} \\
 \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{Y}{X}
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\
 A &= m_0 s \sqrt{Z + R} \\
 B &= m_0 s \sqrt{Z - R}
 \end{aligned}$$

Kontrola rachunku może być przeprowadzona według wzorów

$$A^2 + B^2 = 2m_0^2 s^2 Z, \tag{26}$$

$$A^2 - B^2 = 2m_0^2 s^2 R, \tag{27}$$

$$A^2 \cdot B^2 = 4m_0^4 s^4 D, \tag{28}$$

$$R = \frac{Y}{\sin 2\varphi} = \frac{X}{\cos 2\varphi}, \tag{29}$$

wynikających w sposób natychmiastowy z wzorów wyprowadzonych uprzednio.

Na zakończenie podamy wybrane wartości prawdopodobieństwa W położenia punktu wewnątrz elipsy.

s	$W = 1 - e^{-s^2}$
0,707	0,393
0,832	0,500
1,000	0,632
1,517	0,900
1,731	0,950
2,146	0,990
2,628	0,999

Przykład. Posłużymy się danymi ze skryptu [2]. Przyjmując $m_0 = 2,1$, $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz

$$Q_{11} = 49,3 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_{12} = -13,1 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_{22} = 31,2 \cdot 10^{-4}$$

obliczymy kolejno na podstawie wzorów (25)

$$X = Q_{11} - Q_{22} = 18,1 \cdot 10^{-4}$$

$$Y = 2 Q_{12} = -26,2 \cdot 10^{-4}$$

$$Z = Q_{11} + Q_{22} = 80,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{Y}{X} = -1,448 \quad 2\varphi = 304^\circ$$

$$\varphi = 152^\circ$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 31,8 \cdot 10^{-4}$$

$$A = m_{0,s} \sqrt{Z+R} = 2,1 \cdot 0,707 \cdot 0,106 = 0,157$$

$$B = m_{0,s} \sqrt{Z-R} = 2,1 \cdot 0,707 \cdot 0,070 = 0,104$$

Półośie A, B otrzymuje się w tych jednostkach, które były przyjęte do obliczenia współczynników równań poprawek. W danym przypadku półosie wyrażone są w decymetrach.

LITERATURA

- [1] *Hausbrandt St.*: Analiza porównawcza dokładności wielkotrójkątowych i małotrójkątowych sieci triangulacyjnych nawiązana do prac geodezyjnych w Polsce. Prace IGiK, Warszawa, 1955.
- [2] *Hausbrandt St.*: Teoria błędów pomiarów nżynierskich. Wydawnictwa PW, Warszawa, 1963.
- [3] *Richardus P.*: Project Surveying. Amsterdam, 1966.

Recenzował: prof. dr Stanisław Milbert

Rękopis złożono w Redakcji w sierpniu 1970 r.

ЕЖИ ГАЗДЗИЦКИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЛИПСОВ ОШИБОК

Резюме

В работе обсуждаются, мало известные в польской технической литературе, формулы для вычислений элементов эллипсов ошибок на основе весовых коэффициентов Q_{ij} .

Формулы эти были выведены согласно теории эллипсов ошибок сформулированной в многих работах профессора С. Хаусбрандта.

CALCULATING THE ELEMENTS OF ERROR ELLIPSES

S u m m a r y

In his paper the author presents formulae which are little known in Polish literature and which can be useful for calculating the elements of error ellipses on the basis of their weight coefficients Q_{ij} . He developed these formulae using as basis the theory of error ellipses described in S. Hausbrandt's publications.

