PRACE INSTYTUTU GEODEZJI I KARTOGRAFII

Tom XIII, Zeszyt 2 (29), 1966

TADEUSZ CHOJNICKI

528.563.089.6

Metody cechowania grawimetrów typu Askania Gs-11

1. Wstęp

Statyczne grawimetry sprężynowe, do jakich należy grawimetr typu Askania Gs-11, służące do pomiaru różnic przyspieszenia siły ciężkości Δg, pozwalają uzyskać bezpośrednie wyniki pomiaru nie w układzie *cgs*, lecz w jednostkach podziałki układu pomiarowego danego grawimetru. Znalezienie zależności pomiędzy jednostkami układu pomiarowego danego grawimetru a jednostkami układu *cgs*, zwane cechowaniem grawimetru, stanowi zatem podstawowe zagadnienie pomiarów grawimetrycznych.

Konstrukcja grawimetru Askania Gs-11 jest konstrukcją wyjątkowo udaną, gwarantującą uzyskiwanie wyników o wysoko dokładnej zgodności wewnętrznej w układzie działek podziałki pomiarowej tego grawimetru. Wykorzystanie tego faktu do uzyskania równie dokładnych wyników pomiaru w układzie *cgs* prowadzi zatem poprzez właściwe opracowanie zagadnienia wycechowania tego grawimetru. Problemowi temu w całości służy niniejsza praca.

Na wstępie niniejszej pracy podana jest ogólna teoria grawimetru Askania Gs-11 w ujęciu, podobnym do tego, w jakim R. Schulze podał teorię grawimetru Askania typu Gs-12 [1]. Następnie w oparciu o tę teorię ogólną, wyprowadzone zostaną wzory szczegółowe, służące do opracowywania pomiarów, wykonanych tym grawimetrem, przy czym rozważania prowadzone będą w dwóch kierunkach:

1. Kształt funkcji, która występuje w ujęciu ogólnym i określa zależność wielkości wydłużenia sprężyny pomiarowej grawimetru od siły, wywołującej to wydłużenie, zostanie przyjęty hipotetycznie. Założenie to,

nazywane w dalszym ciągu założeniem firmy Askania, wynika z instrukcji producenta, dotyczącej sposobu przeliczania wyników pomiarów [2].

2. Kształt funkcji, omawianej w punkcie 1, wyznaczony zostanie w oparciu o teorię sprężyny śrubowej.

Podane dwa kierunki rozważań prowadzą do uzyskania dwóch zasadniczych metod cechowania i obliczania pomiarów, wykonanych grawimetrem Gs-11. Dla każdej z metod opracowane zostaną wzory szczegółowe, uwzględniające wszelkie zagadnienia techniki pomiarów grawimetrami, jak: wyznaczanie stałych grawimetru, wyznaczanie współczynników zmiennych grawimetru i określenie sposobu ich zmienności, łączne wyrównywanie wieloletnich pomiarów cechujących, obliczanie wartości Δg itp. Ponadto wyprowadzone zostaną związki pomiędzy obu rozpatrywanymi metodami.

W oparciu o materiał obserwacyjny, dokonana zostanie analiza dokładnościowa opracowań, wykonanych obydwiema metodami, celem wyciągnięcia wniosków, co do ustalenia najwłaściwszego sposobu postępowania przy cechowaniu tego typu grawimetrów.

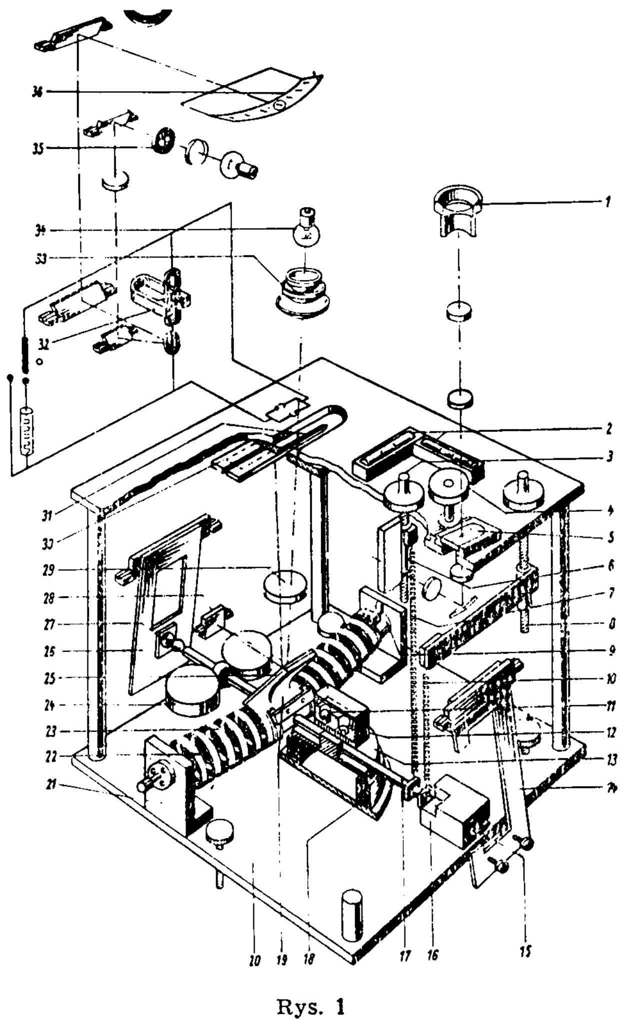
Materiał obserwacyjny, użyty do analiz, uzyskany został z pomiarów dwoma egzemplarzami grawimetrów Askania Gs-11, oznaczonymi numerami 112 i 110. Numerem 112 oznaczony jest egzemplarz, będący w posiadaniu Instytutu Geodezji i Kartografii w Warszawie, a numerem 110 — egzemplarz, będący w posiadaniu Stacji Szerokościowej Polskiej Akademii Nauk w Borowcu koło Poznania.

2. Opis budowy i zasady pomiaru grawimetrem Gs-11

W fachowej literaturze, dostępnej w Polsce, istnieje szereg pozycji [2], [9], w których dość szczegółowo podano opis konstrukcji grawimetru Askania Gs-11. W związku z tym, w niniejszym rozdziale ograniczymy się tylko do podania ogólnej zasady konstrukcji tego grawimetru i tylko tych szczegółów, które ściśle wiążą się z rozważaniami, podanymi w dalszych rozdziałach.

Grawimetr Askania Gs-11 jest statycznym grawimetrem sprężynowym. Konstrukcja jego opiera się na zasadzie torsyjnej wagi sprężynowej. Przyciąganie pewnej stałej masy przez siłę ciężkości jest kompensowane przez siłę torsyjną układu sprężyn. Zmiany siły ciężkości mierzone są przez zmiany skrętu odpowiedniej pary sprężyn śrubowych.

Schematycznie zasada budowy grawimetru podana jest na rys. 1. Dwie duże sprężyny śrubowe (23), leżące poziomo, są napięte pomiędzy głowicami torsyjnymi (9) i zaczepem (19) belki (17). Głowice torsyjne są przymocowane za pomocą wsporników (21) do podstawy (20). W ten sam sposób, wewnątrz dużych sprężyn umocowane są dwie małe sprężyny śrubowe (22), celem kompensacji temperatury. Zależność między przyspieszeniem siły ciężkości i skrętem sprężyn (23) wywołana jest w ten sposób, że belka (17), na końcu której umieszczono masę (16), podlegającą działaniu



Rys. 1

siły ciężkości, utrzymywana jest w poziomie przez siłę torsyjną tych sprężyn (23). Zmiany siły ciężkości wywołują wychylenie belki, a przez to i zmianę skrętu pary sprężyn poziomych. Sprężynowy układ grawimetru ustawia się wtedy w nowym położeniu równowagi, w którym belka układu odchyla się od położenia poziomego o mały kąt. Kąt ten jest proporcjonalny do zmiany siły ciężkości.

Kąt wychylenia belki z położenia poziomego nie jest mierzony bezpośrednio. Odczyt pomiarowy, jako efekt zmiany przyspieszenia siły ciężkości, uzyskuje się drogą pośrednią. Do belki (17) przymocowana jest dodatkowa sprężyna kompensacyjna (7), zwana sprężyną pomiarową. Wychylenia belki z położenia poziomego na skutek zmian przyspieszenia siły ciężkości, kompensowane są przez zmianę rozciągnięcia tej sprężyny, wywoływaną przez obrót pokrętła (3). Pomiaru dokonuje się metodą zerową, tzn. belkę doprowadza się za pomocą kompensacyjnej sprężyny pomiarowej zawsze do położenia zerowego, tj. poziomego. Zmiany rozciągnięcia sprężyny pomiarowej lub — inaczej mówiąc — zmiany długości tej sprężyny, które są efektem pomiarowym grawimetru, odczytuje się na precyzyjnej podziałce (6), związanej sztywno z jednym końcem sprężyny pomiarowej.

Jako wskaźnik zerowego położenia belki, służy urządzenie fotoelektryczne.

Wymagania, stawiane stałości fizycznych własności materiałów, z których wykonano sprężyny oraz elementy fotoelektryczne, są szczególnie wysokie. Z tego powodu aparat posiada dobrą izolację termiczną oraz zaopatrzony jest w podwójny termostat, który w zależności od temperatury zewnętrznej może być nastawiany na cztery temperatury: 25°, 35°, 40° i 45°C.

Grawimetr Gs-11 wyposażony jest w tzw. dodatkowe urządzenie do cechowania. Urządzenie to składa się z małej skrzynki, zamkniętej ze wszystkich stron, umieszczonej na belce (17) układu pomiarowego. W skrzynce znajduje się kulka z brązu (11) o średnicy około 2,5 mm, która zajmuje zawsze jedno z dwóch możliwych położeń w jednym z dwóch otworów (12) w spodzie skrzynki. Odstęp między otworami, liczony wzdłuż osi belki, wynosi 5 mm. Przemieszczenie kulki z jednego otworu do drugiego odbywa się przez przechylanie grawimetru z położenia pionowego o 90° w lewo lub prawo; stąd rozróżniamy lewe i prawe położenie kulki urządzenia do cechowania.

Przez zmianę położenia kulki osiąga się zmianę momentu obrotowego masy układu pomiarowego grawimetru. Prowadzi to do wystąpienia pewnej stałej (c), którą wyznacza się drogą cechowania i która służy do wyznaczania i kontrolowania zmienności jednego ze współczynników grawimetru (a), związanego z wyznaczaniem wartości działek skali grawimetru w miligalach.

Z pozostałych urządzeń grawimetru, mniej istotnych dla rozważań, podanych w niniejszej pracy, należy jeszcze wymienić: libele do poziomowania instrumentu (2), sprężynę dodatkową do zmiany bezpośredniego zakresu pomiaru (10), urządzenie tłumiące drgania belki (13, 18), urządzenie kompensujące zmiany ciśnienia atmosferycznego (24) i dźwignie aretujące (14, 26).

3. Wzory ogólne, określające g i Δg

W swojej pracy [1] R. Schulze podał teorię grawimetru Askania Gs-12. Do wyprowadzenia ogólnych wzorów na g i Δg dla grawimetru Gs-11 wykorzystamy jego wywody aż do momentu, w którym trzeba uwzględnić rozbieżność konstrukcji tych dwóch typów grawimetrów.

W układzie mierzącym grawimetru Gs-11 działają następujące momenty sił: moment związany z masą podstawową m_p o ramieniu r_p:

$$m_p \cdot g \cdot r_p,$$

oraz moment związany z masą m_k kulki urządzenia do cechowania o ramieniu r:

$$m_k \cdot g \cdot r.$$

Moment obrotowy głównej sprężyny poziomej jest równy:

$$\tau \cdot \varphi$$

gdzie: τ — współczynnik torsyjny, a φ — kąt skrętu.

Moment obrotowy sprężyny pomiarowej, kompensującej wychylenia ramienia mas m_p i m_k z położenia zerowego, można określić przez iloczyn:

$$r_h \cdot h(H),$$

gdzie r_h jest ramieniem działania siły $h(H)$, napinającej sprężynę pomiarową, którą to siłę przedstawiamy jako funkcję długości H tej sprężyny. Długością H sprężyny nazywać będziemy odległość między końcami sprężyny, liczoną wzdłuż osi sprężyny, w odróżnieniu od — występującego dalej — pojęcia długości drutu sprężyny, oznaczanego przez L.

Do pomiaru długości sprężyny grawimetr wyposażony jest w podziałkę pomiarową. Na podziałce tej nie mierzymy całej długości sprężyny lecz tylko jej część, gdyż przy nastawieniu podziałki na zero, sprężyna posiada pewną długość H_0. Będziemy mieli zatem:

$$H = H_0 + M, \tag{1}$$

gdzie M — odczyt podziałki. Ponieważ grawimetr Gs-11 służy wyłącznie do pomiaru różnic przyspieszenia siły ciężkości, a — jak łatwo zauważyć —

$$\Delta H = \Delta M, \tag{2}$$

więc do dalszych rozważań przyjmiemy, że siła napinająca sprężynę pomiarową jest funkcją odczytu na podziałce $h(M)$. Zatem działanie sprężyny pomiarowej określi moment:

$$r_h \cdot h(M).$$

Równowaga układu mierzącego określona jest warunkiem:

$$m_p g r_p + m_k g r = \tau\varphi + r_h h(M), \tag{3}$$

a stąd:

$$g = \frac{\tau\varphi + r_h h(M)}{m_p r_p + m_k r}. \tag{4}$$

Ponieważ pomiar wykonuje się zawsze w położeniu zerowym, w prawej stronie równania (4) wszystkie wartości, prócz $h(M)$ i r, będą stałe. Zmienność ramienia r, związanego z masą m_k kulki, będącej częścią masy głównej, stanowi właśnie wspomnianą na wstępie, podstawową rozbieżność między konstrukcjami grawimetrów Gs-11 i Gs-12. W tym ostatnim ramię, związane z masą główną, jest stałe, a zmienna jest masa główna. Zatem wyniki dalszych rozważań uzyskamy już inne niż Schulze [1]. Ze względu na wspomnianą rozbieżność konstrukcyjną, prócz zmienności podziałki M musimy uwzględniać w dalszych rozważaniach zmienność ramienia r, a nie masy m.

Dla uproszczenia wprowadzimy jeszcze oznaczenia:

$$r_p = \frac{m_k}{m_p} R \quad \text{oraz} \quad \tau\varphi + r_h h(M) = m_k k(M). \tag{5}$$

Wstawiając (5) do (4), otrzymamy:

$$g = \frac{k(M)}{R+r}. \tag{6}$$

Celem obliczenia Δg założymy, że funkcja $k(M)$ jest wielomianem n-tego stopnia i następnie funkcję $g = f(M, r)$ (6) rozwiniemy w szereg Taylora. Będziemy zatem mieli:

$$\Delta g = \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial g}{\partial M}\Delta M + \frac{\partial g}{\partial r}\Delta r\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial M^2}\Delta M^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\Delta M \Delta r}\Delta M \Delta r + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\Delta r^2\right] +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n g}{\partial M^n}\Delta M^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n g}{\partial M^{n-1}\partial r}\Delta M^{n-1}\Delta r + \ldots + \frac{\partial^n g}{\partial r^n}\Delta r^n\right]. \tag{7}$$

Obliczając poszczególne pochodne cząstkowe (do czwartych włącznie), występujące we wzorze (7), otrzymamy:

$$\frac{\partial g}{\partial M} = \frac{k'(M)}{R+r} \qquad \frac{\partial^3 g}{\partial M \partial r^2} = \frac{2k'(M)}{(R+r)^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{g}{R+r} \qquad \frac{\partial^3 g}{\partial r^3} = -\frac{6g}{(R+r)^3}$$

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 g}{\partial M^2} = \dfrac{k''(M)}{R+r} & \dfrac{\partial g^4}{\partial M^4} = \dfrac{k''''(M)}{R+r} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 g}{\partial M \partial r} = -\dfrac{k'(M)}{(R+r)^2} & \dfrac{\partial^4 g}{\partial M^3 \partial r} = \dfrac{k'''(M)}{(R+r)^2} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \dfrac{2g}{(R+r)^2} & \dfrac{\partial^4 g}{\partial M^2 \partial r^2} = \dfrac{2k''(M)}{(R+r)^3} \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 g}{\partial M^3} = \dfrac{k'''(M)}{R+r} & \dfrac{\partial^4 g}{\partial M \partial r^3} = -\dfrac{6k'(M)}{(R+r)^4} \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 g}{\partial M^2 \partial r} = -\dfrac{k''(M)}{(R+r)^2} & \dfrac{\partial^4 g}{\partial r^4} = \dfrac{24g}{(R+r)^4}
\end{array}
\tag{8}
$$

Wstawiając wyniki różniczkowania (8) do wzoru (7) i porządkując poszczególne wyrazy, otrzymamy:

$$
\Delta g = \left[1 - \frac{\Delta r}{R+r} + \left(\frac{\Delta r}{R+r}\right)^2 - \ldots + \left(-\frac{\Delta r}{R+r}\right)^n\right] \cdot \left\{\frac{1}{R+r}\left[\frac{1}{1!}k'(M)\Delta M + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \frac{1}{2!}k''(M)\Delta M^2 + \ldots + \frac{1}{n!}k^{(n)}(M)\Delta M^n\right] - \frac{g}{R+r}\Delta r\right\}. \tag{9}
$$

Ponieważ wartość $\frac{\Delta r}{R+r} < 1$, więc wyrażenie w pierwszym nawiasie prostokątnym wzoru (9) możemy obliczyć jako sumę wyrazów nieskończonego postępu geometrycznego S_n, w którym wyraz pierwszy $a_n = \frac{\Delta r}{R+r}$ a stały iloraz $q = -\frac{\Delta r}{R+r}$ Jak wiadomo:

$$
\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}, \tag{10}
$$

a więc:

$$
\frac{\Delta r}{R+r} - \left(\frac{\Delta r}{R+r}\right)^2 + \ldots - \left(-\frac{\Delta r}{R+r}\right)^n = \frac{\Delta r}{R+r+\Delta}. \tag{11}
$$

Ponieważ zmiana długości ramienia Δr masy kulki jest wielkością stałą, ze względu na możliwość istnienia tylko dwóch położeń tej kulki, takie wyrażenia, gdzie występują wielkości R, r i Δr, możemy przyjąć za stałe dla grawimetru. Oznaczymy zatem:

$$
C = \frac{\Delta r}{R+r+\Delta r}, \quad c = \frac{\Delta r}{R+r}. \tag{12}
$$

Ostatecznie więc, ogólny wzór do wyznaczania różnicy przyspieszenia siły ciężkości Δg grawimetrem Gs-11 z uwzględnieniem zmiany położenia kulki w urządzeniu do cechowania, będzie miał postać:

$$
\Delta g = (1-C)\left[\frac{1}{R+r}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}k^{(i)}(M)\Delta M^i\right) - gc\right]. \tag{13}
$$

Wzory (6) i (13) będą podstawowymi wzorami ogólnymi, w oparciu o które prowadzone będą rozważania w celu wyprowadzenia wzorów szczegółowych. Rozważania te różnić się będą sposobami wyznaczania funkcji $k(M)$.

4. Wzory szczegółowe, określające g i Δg

4.1. Wyprowadzenie wzorów szczegółowych w oparciu o założenie firmy Askania

W literaturze dostępnej w Polsce nie posiadamy wyprowadzenia wzorów szczegółowych na g i Δg, na podstawie których sporządzono instrukcję producenta, dotyczącą obliczania tych elementów na podstawie wyników pomiaru [2]. Wobec tego, wychodząc ze wzorów ogólnych, podanych w poprzednim rozdziale, dokonamy rekonstrukcji takiego wyprowadzenia, mając na celu otrzymanie takich wyników, na jakich oparta jest instrukcja [2].

We wspomnianej instrukcji podany jest między innymi wykres wartości jednej działki podziałki grawimetru w miligalach w zależności od jej położenia na tej podziałce. Wykres ten obrazuje zatem pochodną mierzonego przyspieszenia g względem podziałki M grawimetru. Wobec tego, w ramach oznaczeń stosowanych przy rozważaniach podanych w poprzednim rozdziale, założenie liniowości tej pochodnej możemy zapisać w następujący sposób:

$$\frac{\partial g}{\partial M} = \frac{k'(M)}{R+r} = a+2bM. \tag{14}$$

Założenie liniowości pochodnej $\frac{\partial g}{\partial M}$, zwane dalej założeniem firmy Askania, przyjmujemy dlatego, że na wspomnianym wyżej wykresie pochodna ta przedstawiona jest jako linia prosta. Wzór (14) określa podstawową zależność, która pozwoli nam na wyprowadzenie szczegółowych wzorów na g i Δg, w oparciu o założenie przyjęte przez producenta. A więc ze wzoru (14) będziemy mieli:

$$k'(M) = (R+r)\,(a+2\,bM), \tag{15a}$$

a stąd:

$$\begin{gathered} k''(M) = (R+r)\,2\,b, \\ k'''(M) = 0. \end{gathered} \tag{15b}$$

Ponadto:

$$k(M) = (R+r)\int(a+2bM)dM = (R+r)\,(aM+bM^2+const). \tag{16}$$

Wstawiając (16) do (6), otrzymamy:

$$g = aM + bM^2 + const.$$

Wykorzystując pojęcie tzw. przyspieszenia referencyjnego g_r, tj. pewnego przyspieszenia względnego związanego z określonym egzemplarzem grawimetru i momentem pomiaru a różniącym się od przyspieszenia rzeczywistego o pewną wartość stałą, tzn.

$$g_r = g - const, \tag{17}$$

możemy ostatecznie napisać:

$$g_r = aM + bM^2. \tag{18}$$

W celu obliczenia różnicy przyspieszenia Δg, do wzoru (13) wstawimy wartości kolejnych pochodnych funkcji $k(M)$ podane jako wzory (15a) i (15b):

$$\Delta g = (1-C)\,[(a+2bM)\,\Delta M + b\Delta M^2 - gc]. \tag{19}$$

Wprowadzając jeszcze oznaczenie:

$$\Sigma M = M_1 + M_2, \tag{20}$$

otrzymamy:

$$\Delta g = (1-C)\,[\Delta M(a+b\Sigma M) - gc]. \tag{21}$$

Wzór (21) jest podstawowym wzorem dla grawimetru Gs-11 dla założenia, że pierwsza pochodna mierzonego przyspieszenia siły ciężkości względem długości sprężyny jest funkcją liniową, który uwzględnia zmianę odczytu podziałki M na skutek zmiany przyspieszenia siły ciężkości g oraz zmiany położenia kulki. Jak łatwo zauważyć — w szczególnym przypadku — gdy nie zmieniamy położenia kulki, tzn. gdy C i c są równe zeru, z wzoru (21) otrzymamy:

$$\Delta g = (a + b\Sigma M)\Delta M, \tag{22}$$

tj. zwykły wzór do obliczania Δg z pomiaru grawimetrem Gs-11 przy jednym położeniu kulki.

Z opisu grawimetru Gs-11 [2] wynika, że firma Askania stosuje wzór:

$$\Delta g = (a + b_{Ask.} \cdot M_{śr})\Delta M,$$

gdzie:

$$M_{śr} = \frac{M_1 + M_2}{2} = \frac{\sum M}{2},$$

a więc różnica jest tylko formalna, gdyż jak widać $b_{Ask.} = 2b$.

4.2. *Wyprowadzenie wzorów szczegółowych w oparciu o teorię sprężyny śrubowej*

Obecnie wyprowadzimy wzory szczegółowe dla grawimetru Gs-11, tzn. określimy funkcję $k(M)$ w oparciu o teorię sprężyny śrubowej. Wzór na wydłużenie sprężyny śrubowej pod działaniem obciążenia ma postać [3], [4]:

$$f = \frac{64\, PR_s^3 n}{Gd^4} \tag{23}$$

gdzie: f — wielkość wydłużenia, P — siła napinająca sprężynę, R_s — promień zwojów sprężyny, n — ilość zwojów sprężyny, G — moduł sprężystości poprzecznej, d — średnica przekroju drutu sprężyny. Wzór (23) wyraża przybliżoną, liniową zależność między obciążeniem a wydłużeniem sprężyny, bo np.: nie uwzględnia zmiany promienia przy zmianie długości sprężyny, siłę P traktuje jako działającą w osi sprężyny a nie mimośrodowo itp. [3], [4]. Ponieważ nieliniowość funkcji $f = F(P)$ jest spowodowana w grawimetrze Gs-11 głównie pierwszą przyczyną tj. zmiennością promienia zwojów sprężyny [5], [6], spróbujemy obecnie matematycznie ująć to zjawisko.

W toku wyprowadzenia wzoru (23), długość drutu sprężyny L zastąpiono wyrażeniem:

$$L = 2\pi n R_s. \tag{24}$$

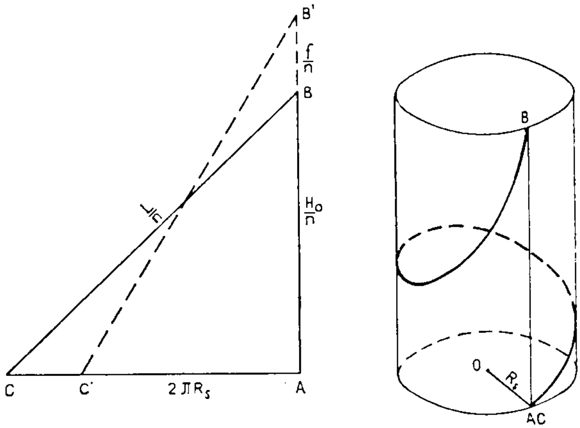
Obecnie musimy zrezygnować z zastąpienia L przez $2\pi n R_s$ we wzorze (23), gdyż w rozpatrywanym zagadnieniu długość drutu sprężyny nie ulega zmianie, a promień R_s traktujemy jako zmienny. Zatem wzór (23) przyjmie postać:

$$f = \frac{32 LPR_s^2}{\pi G d^4}. \tag{25}$$

Celem znalezienia zależności między wydłużeniem sprężyny f a jej promieniem R_s, rozpatrzymy zależności geometryczne między elementami jednego zwoju sprężyny śrubowej, przedstawione na rys. 2. Jeśli pobocznicę walca opisanego na sprężynie rozetniemy wzdłuż tworzącej AB tego walca i rozwiniemy na płaszczyznę, otrzymamy trójkąt prostokątny ABC, w którym:

$$AB = \frac{H_0}{n}, \quad BC = \frac{L}{n} \quad \text{i} \quad AC = 2\pi R_s,$$

gdzie H_0 — długość sprężyny w położeniu zerowym. Pod wpływem obciążenia P długość sprężyny zwiększy się o f przez co rozpatrywany trójkąt ABC zmieni się na $AB'C'$, w którym bok AB' wydłuży się w stosunku do AB o $\frac{f}{n}$, a długość boku $B'C'$ pozostanie taka sama w stosunku do długości



Rys. 2

boku BC, gdyż długość drutu sprężyny L pozostaje niezmienna. Zatem z trójkąta $AB'C'$ możemy napisać:

$$4\pi^2 R_s^2 = \frac{L^2}{n^2} - \frac{(H_0+f)^2}{n^2},$$

a stąd:

$$R_s^2 = \frac{L^2 - H_0^2 - 2H_0 f - f^2}{4\pi^2 n^2}. \tag{26}$$

Dla uproszczenia zapisu dalszych rozważań oznaczymy:

$$y = \frac{L^2 - H_0^2}{4\pi^2 n^2}, \quad x = \frac{2H_0}{4\pi^2 n^2}, \quad q = \frac{1}{4\pi^2 n^2}, \tag{27}$$

a więc:

$$R_s^2 = y - xf - qf^2. \tag{28}$$

Oznaczając zespół stałych elementów we wzorze (25) przez:

$$\frac{1}{z_0} = \frac{32\,L}{\pi\,Gd^4}, \tag{29}$$

otrzymamy z tego wzoru:

$$P = \frac{z_0 f}{R_s^2}. \tag{30}$$

Wstawiając (28) do (30) i oznaczając:

$$u_0 = \frac{z_0}{y}, \quad v = \frac{x}{y}, \quad w = \frac{q}{y}, \qquad (31$$

otrzymamy:

$$P = \frac{uf}{1 - vf - wf^2}. \tag{32}$$

Wzór (32) przedstawia zatem siłę P napinającą sprężynę pomiarową jako funkcję f wydłużenia tej sprężyny. Ponieważ wydłużenie sprężyny mierzymy w grawimetrze na podziałce M, więc $f = M$. W myśl określenia przyjętego na początku rozważań nad wzorami ogólnymi w rozdz. 3, że $h(M)$ oznacza siłę napinającą sprężynę pomiarową, możemy napisać:

$$P = h(f) = h(M) = \frac{u_0 M}{1 - vM - wM^2}. \tag{33}$$

Wstawiając wyrażenie na $h(M)$ określone wzorem (33) do wzoru (4) i oznaczając:

$$R = \frac{m_p r_p}{m_k}, \quad u = \frac{r_h u_0}{m_k}, \quad t = \frac{\tau\varphi}{m_k}, \tag{34}$$

otrzymamy:

$$g = \frac{\dfrac{uM}{1 - vM - wM^2} + t}{R + r}. \tag{35}$$

Porównując wzór (35) ze wzorem (6) łatwo zauważymy, że w ujęciu przedstawionym w tym rozdziale funkcja $k(M)$ będzie miała postać:

$$k(M) = \frac{uM}{1 - vM - wM^2} + t. \tag{36}$$

Dla przedstawienia funkcji $k(M)$ w wygodniejszej do obliczeń postaci, możemy ją rozwinąć w szereg Mc Laurina. Otrzymamy wtedy:

$$k(M) = t + uM + uvM^2 + u(w + v^2)M^3 + u(2vw + v^3)M^4 + \dots \tag{37}$$

a więc:

$$g = \frac{1}{R + r}\,[t + uM + uvM^2 + u(w + v^2)M^3 + u(2vw + v^3)M^4 + \dots]. \tag{38}$$

Wykorzystując pojęcie przyspieszenia referencyjnego i oznaczając:

$$A = \frac{u}{R + r}, \tag{39}$$

otrzymamy:

$$g_r = A[M + vM^2 + (w + v^2)M^3 + (2vw + v^3)M^4 + \dots],$$

lub:

$$g_r = AM[1 + vM + (w + v^2)M^2 + (2vw + v^3)M^3 + \dots].$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasie prostokątnym przez $F(M)$, otrzymamy ostatecznie:

$$\left.\begin{aligned} g_r &= AMF(M) \\ \text{gdzie:}\quad F(M) &= 1+vM+(w+v^2)M^2+(2vw+v^3)M^3+\dots \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Do wyprowadzenia wzoru na Δg, poniżej podane kolejne pochodne określonej wzorem (37) funkcji $k(M)$:

$$\begin{aligned} k'(M) &= u[1+2vM+3(w+v^2)M^2+4(2vw+v^3)M^3+\dots] \\ k''(M) &= u[2v+6(w+v^2)M+12(2vw+v^3)M^2+\dots] \\ k'''(M) &= u[6(w+v^2)+24(2vw+v^3)M+\dots] \\ k''''(M) &= u[24(2vw+v^3)+\dots] \end{aligned}$$

wstawimy do wzoru (13). Po uporządkowaniu i uwzględnieniu oznaczenia (39), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta g = (1-C)\{A\Delta M[1+v(2M+\Delta M)+(w+v^2)(3M^2+3M\Delta M+\Delta M^2)+ \\ +(2vw+v^3)(4M^3+6M^2\Delta M+4M\Delta M^2+\Delta M^3)+\dots]-gc\}. \end{aligned} \tag{41}$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasie prostokątnym przez $f(M, \Delta M)$, otrzymamy:

$$\Delta g = (1-C)\,[A\Delta Mf(M,\Delta M)-gc],$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f(M,\Delta M) = 1+v(2M+\Delta M)+(w+v^2)(3M^2+3M\Delta M+\Delta M^2)+ \\ +(2vw+v^3)(4M^3+6M^2\Delta M+4M\Delta M^2+\Delta M^3)+\dots \end{aligned} \tag{42}$$

Dla jednego położenia kulki w urządzeniu do cechowania, tzn. dla $C = c = 0$, wzór (42) przyjmie postać:

$$\Delta g = A\Delta Mf(M,\Delta M). \tag{43}$$

Jeśli wrócimy teraz do wyrażeń oznaczonych dla uproszczenia we wzorze (42) przez u, v i w (wzory: 27, 29, 31, 34 i 39), to wzór (43) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \Delta g = A\Delta M\Bigg[1+\frac{2H_0}{L^2-H_0^2}(2M+\Delta M)+\frac{L^2+3H_0^2}{(L^2-H_0)^2}(3M^2+3M\Delta M+\Delta M^2)+ \\ +\frac{4H_0(L^2-H_0^2)+8H_0^3}{(L^2-H_0^2)^3}(4M^3+6M^2\Delta M+4M\Delta M^2+\Delta M^3)+\dots\Bigg], \end{aligned} \tag{44}$$

gdzie:

$$A = \frac{\pi^3Gn^2d^4r_h}{8L(L^2-H_0^2)(r_pm_p+m_kr)}. \tag{45}$$

Łatwo można zauważyć, że współczynnika A nie da się dokładnie wyznaczyć w oparciu o wzór (45). Ma to miejsce przede wszystkim dlatego, że dokładne wyznaczenie wartości modułu sprężystości poprzecznej G jest w ogóle trudne, a w szczególności trudność ta spotęgowana jest faktem utrzymywania w tajemnicy przez producenta rodzaju materiału, użytego do wyrobu sprężyn w grawimetrze Gs-11. Ponadto duże trudności nastręczałby pomiar mas i długości ramion układu mierzącego, gdyż wymagałby częściowego demontażu tego układu, co jest bardzo niewskazane. Natomiast w nawiasie prostokątnym wzoru (44) we współczynnikach przy M występują tylko dwie wielkości fizyczne L i H_0 (długość drutu sprężyny i długość sprężyny dla $M = 0$), które to wartości można względnie łatwo pomierzyć np. na drodze optycznej, co będzie dalej szczegółowo opisane w p. 5.2.1. Zatem znaczenie wzoru (44) polega na tym, że cechowanie czyli wyznaczanie zależności między g i M sprowadza się do wyznaczania na drodze pomiaru grawimetrem na bazie tylko jednego współczynnika A a nie jak dotychczas co najmniej dwóch a i b.

Praktycznie korzystanie ze wzoru (44) będzie najprostsze wtedy, gdy dla danego egzemplarza grawimetru po pomiarze jego elementów L i H_0 ułożymy tablice dla wyrażenia znajdującego się w nawiasie prostokątnym, tj. dla funkcji $f(M, \Delta M)$, przyjmując jako argumenty M i ΔM (p. 5.2.2. niniejszej pracy).

5. Cechowanie grawimetru Askania Gs-11 na bazach grawimetrycznych

Obecnie omówione zostaną sposoby wyznaczania współczynników występujących we wzorach, określających zależność między różnicami przyspieszenia siły ciężkości Δg i odpowiadającymi im wskazaniami podziałki grawimetru ΔM. Czynności związane z tymi wyznaczeniami nazywamy ogólnie cechowaniem grawimetru.

Dla prac polowych związanych z cechowaniem grawimetrów, wykorzystuje się zakładane specjalnie w tym celu w terenie tzw. bazy grawimetryczne.

Według najbardziej ogólnej definicji, bazą grawimetryczną do cechowania grawimetrów nazywać będziemy zespół punktów, między którymi znana jest różnica przyspieszenia siły ciężkości. Ze względów technicznych i ekonomicznych, na danym obszarze, który baza ma obsługiwać, z możliwych wariantów wybiera się taki, w którym stosunek różnicy Δg do różnicy odległości między krańcowymi punktami bazy jest największy. W praktyce więc, baza grawimetryczna jest odcinkiem wygodnej trasy komunikacyjnej, w przybliżeniu prostoliniowej i położonej południkowo, której północny kraniec położony jest możliwie najniżej a południowy najwyżej [7], [8].

Zagadnienie cechowania rozpatrzone zostanie w oparciu o dwie zasadnicze grupy wzorów, wyprowadzonych w poprzednich rozdziałach, a mianowicie: grupę wzorów uzyskanych przy przyjęciu założenia firmy Askania oraz grupę wzorów uzyskanych w oparciu o teorię sprężyny śrubowej.

5.1. *Cechowanie grawimetru przy zastosowaniu wzorów szczegółowych, wyprowadzonych w oparciu o założenie firmy Askania*

5.1.1. *Łączne wyznaczenie współczynników a i b*

Jeśli weźmiemy pod uwagę wzór (22):

$$\Delta g = (a + b\Sigma M)\Delta M$$

to zauważymy łatwo, że celem wyznaczenia liczbowej zależności między Δg i ΔM trzeba określić współczynniki a i b. Do jednoznacznego wyznaczenia tych współczynników wystarczy dysponować bazą grawimetryczną o jednym punkcie pośrednim, co utworzy nam dwa odcinki o znanej wartości Δg. Po pomiarze na tych dwóch odcinkach i uzyskaniu wartości ΔM, z dwóch równań o dwóch niewiadomych a i b wyznaczymy te niewiadome a tym samym określimy numeryczną zależność między g i M. Jeśli będziemy dysponować bazą o większej ilości punktów pośrednich lub większą ilością takich baz tzn. większą ilością odcinków o znanej wartości Δg, uzyskamy obserwacje nadliczbowe i powstanie zagadnienie sposobu wyrównania tych wartości. To zagadnienie wyrównawcze, w ten sposób ujęte, zostało już opracowane i opublikowane [7].

Jednak rozwiązanie tego zagadnienia wyrównawczego przez operowanie wartościami Δg i ΔM między punktami bazy jest raczej niewskazane. Przy n punktach bazy tworzy się $\frac{1}{2}n(n-1)$ odcinków, z których należy wybrać $(n-1)$ odcinków niezależnych. Trzeba też odpowiednio ustalić wagi, gdyż jak wiadomo, dokładność wyznaczenia współczynników zależy od wielkości różnicy Δg bazy, na której się cechuje. W wypadku np. każdej z dwóch baz polskich, które posiadają po 7 punktów, należałoby wybierać 6 odcinków z pomiędzy 21 możliwych. Ten nadmiar możliwości wyboru jest raczej okolicznością niekorzystną.

Korzystniejsze wyniki otrzymujemy operując wartościami przyspieszenia referencyjnego g_r i działek skali grawimetru M a nie ich różnicami. Wzór (18) określający zależność między g_r i M ma postać:

$$g_r = aM + bM^2.$$

Ponieważ M jest tutaj wielkością obserwowaną, więc w celu zastosowania do jej wyrównania wzoru na równanie poprawek według metody spostrzeżeń pośredniczących:

$$v_i = \frac{\partial M}{\partial g_r} dg_r + \frac{\partial M}{\partial a} da + \frac{\partial M}{\partial b} db + M_0 - M_i, \tag{46}$$

musimy przedstawić tę wielkość M w postaci nieuwikłanej.

Rozwiązując zatem równanie kwadratowe (18) otrzymamy:

$$M = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bg_r}}{2b}.$$

Ponieważ działki skali M mogą przyjmować tylko wartości dodatnie, otrzymamy:

$$M = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bg_r}}{2b}. \tag{47}$$

Oznaczając przez:

$$A^* = \sqrt{a^2 + 4bg_r} \tag{48}$$

otrzymamy:

$$M = \frac{A^* - a}{2b}. \tag{49}$$

Wzór (49) służyć będzie do obliczania M_0. Różniczkując następnie M we wzorze (47) względem g_r, a i b i wprowadzając oznaczenie (48), otrzymamy:

$$\frac{\partial M}{\partial g_r} = \frac{1}{A^*}, \quad \frac{\partial M}{\partial a} = -\frac{M}{A^*} \quad \text{i} \quad \frac{\partial M}{\partial b} = -\frac{M^2}{A^*}. \tag{50}$$

Wstawiając pochodne cząstkowe (50) do wzoru (46) otrzymamy równanie poprawek w postaci:

$$v_i = \frac{1}{A_i^*} dg_{ri} - \frac{M_i}{A_i^*} da - \frac{M_i^2}{A_i^*} db + M_0 - M_i. \tag{51}$$

Przyspieszenie referencyjne g_{ri} poszczególnych punktów bazy obliczamy w następujący sposób: dla jednego z punktów bazy, zwanego dalej punktem wyjściowym (pw), obliczamy g_{rpw} z wzoru (18):

$$g_{rpw} = a_0 M_{pw} + b_0 M^2{}_{pw}. \tag{52}$$

Przyspieszenie referencyjne i-tego punktu bazy otrzymujemy z wzoru:

$$g_{ri} = g_{rpw} + \Delta g_{ipw}, \tag{53}$$

w którym Δg_{ipw} jest znaną różnicą przyspieszenia siły ciężkości pomiędzy punktem wyjściowym i pozostałymi punktami bazy. Różnice te w zagadnieniu cechowania grawimetru na bazie uważamy za bezbłędne. Wobec tego poprawki przyspieszenia referencyjnego poszczególnych punktów bazy będą równe poprawce tego przyspieszenia punktu wyjściowego dg_{rpw}. Z kolei na wielkość dg_{rpw} złożą się dwa czynniki: właściwa poprawka przyspieszenia referencyjnego punktu wyjściowego, spowodowana błędem pomiaru na tym punkcie oraz błąd obliczenia g_{rpw} przez przyjęcie przybliżonych wartości a_0 i b_0 do obliczeń zamiast $a = a_0 + da$ i $b = b_0 + db$, które otrzymamy dopiero po wyrównaniu. Możemy zatem napisać:

$$dg_{ri} = dg_{rpw} = dg_r + M_{pw}da + M^2_{pw}db. \tag{54}$$

Wstawiając równanie (54) do (51), otrzymamy:

$$v_i = \frac{1}{A_i^*} dg_r + \frac{M_{pw} - M_i}{A_i^*} da + \frac{M_{pw}^2 - M_i^2}{A_i^*} db + M_0 - M_i. \tag{55}$$

Pojęcie przyspieszenia referencyjnego jest ściśle związane z pojęciem chodu grawimetru. W zasadzie wartość stała „*const*" występująca we wzorze (17) jest inna dla każdego odczytu podziałki grawimetru. W toku opracowywania wyników pomiaru grawimetrem, odczyty wykonane w przeciągu pewnego krótkiego okresu (np. kilku dni) metodami graficznymi redukuje się do jednej wartości „*const*", a co za tym idzie do jednej wartości g_r. Ponieważ we wzorze (55) występuje poprawka dg_r tylko jednej wartości g_r, równanie to może służyć do wyrównania tylko takiej grupy pomiarów, które przez uwzględnienie poprawki chodu zostały zredukowane do jednej wartości g_r. Jeśli będziemy chcieli jednocześnie wyrównać więcej grup pomiarów cechujących, wykonanych w różnych okresach czasu, na różnych bazach oraz przy różnych położeniach kulki urządzenia do cechowania, będziemy musieli uwzględnić tyle poprawek dg_r, ile będzie grup pomiarów. Ostatecznie więc równanie poprawek będzie miało postać:

$$v_i = \frac{1}{A_i^*} dg_{rn} + \frac{M_{pw} - M_i}{A_i^*} da + \frac{M_{pw}^2 - M_i^2}{A_i^*} db + M_0 - M_i, \tag{56}$$

gdzie: n — ilość grup pomiarów. Np. w wypadku cechowania grawimetru Askania Gs-11 w Polsce na założonych przez Instytut Geodezji i Kartografii dwóch bazach grawimetrycznych — południowej (S) i północnej (N), i przy wykonywaniu odczytów w dwóch położeniach kulki (L i P), będziemy mieli cztery niewiadome typu dg_r w równaniach błędów: dg_{SL}, dg_{SP}, dg_{NL} i dg_{NP}.

Pokazany tu ścisły sposób wyrównania pomiarów cechujących, celem obliczenia współczynników a i b, jest nieco kłopotliwy ze względu na konieczność wykonywania pracochłonnych rachunków. Jest tak dlatego, że różnica $(A^* - a)$ we wzorze (49) jest mała (w stosunku do A^* i a) i dzielona jest przez małą wartość $2b$, przez co rachunki trzeba prowadzić z ośmioma znakami po przecinku dla zachowania ich właściwej dokładności, co jest szczególnie kłopotliwe przy obliczaniu A^* ze wzoru (48). Jednak przez uwzględnienie pewnego założenia — jak to niżej zostanie wykazane — rachunki można znacznie uprościć.

Z wzoru (18) możemy napisać:

$$M = \frac{g_r}{a} - \frac{b}{a} M^2. \tag{57}$$

Ze względu na to, że współczynnik $\frac{b}{a}$ jest wielkością bardzo małą, wielkość M^2 wziętą z pomiaru można by uważać za bezbłędną i nie podlegającą wyrównaniu. Wtedy równanie (57) dużo prostsze niż (47), posłużyłoby do wyprowadzenia równań błędów i obliczenia M_0. Obliczymy zatem teraz jaki popełnimy błąd M, przyjmując M^2 za bezbłędne. Oznaczymy M po prawej stronie równania (57) przez M^*:

$$M = \frac{g_r}{a} - \frac{b}{a} M^{*2}, \tag{58}$$

a stąd:

$$m_{M_{M^*}} = \pm \frac{\partial M}{\partial M^*} m_{M^*}. \tag{59}$$

Zatem:

$$m_{M_{M^*}} = \pm 2 \frac{b}{a} M^* m_{M^*}. \tag{60}$$

Ponieważ $\frac{b}{a} \cong 0{,}000035$ a $M^*_{max} = 80$ (działek), więc:

$$m_{M_{M^*_{max}}} = \pm 0{,}0056\ m_{M^*}. \tag{61}$$

Jak widać z (61), błąd wywołany założeniem bezbłędności M^2 jest około 200 razy mniejszy od błędu pomiaru. Ponieważ zupełnie wystarczające jest prowadzenie obliczeń wyrównawczych z dokładnością rachunkową 100 razy większą niż pomiar, omawiane założenie można przyjąć.

Przeprowadzając analogiczne zastosowanie wyrównania metodą spostrzeżeń pośredniczących do omawianego zagadnienia w oparciu o wzór (57) tak, jak to było pokazane wyżej w oparciu o wzór (47), otrzymamy następujące równanie błędów:

$$v_i = \frac{1}{a} dg_{rn} + \frac{M_{pw} - M_i}{a} da + \frac{M_{pw}^2 - M_i^2}{a} db + M_0 - M_i. \tag{62}$$

Dalsze, znaczne uproszczenie rachunków uzyskuje się przez pomnożenie obu stron równania (62) przez a, przez co współczynniki przy pierwszych n niewiadomych będą równe 1. Ostatecznie więc forma równań błędów, z której będziemy korzystali w praktyce, będzie:

$$av_i = v_i^* = dg_{rn} + \Delta M_i da + \Delta M_i \Sigma M_i db + a(M_0 - M_i), \tag{63}$$

gdzie:

$$\Delta M_i = M_{pw} - M_i \quad \text{oraz} \quad \Sigma M_i = M_{pw} + M_i.$$

5.1.2. *Niezależne wyznaczenie współczynników a i b.*

Łączne wyznaczenie współczynników a i b, omówione w poprzednim rozdziale posiada tę wadę, że dokładność wyznaczenia współczynnika b tym sposobem nie jest duża. Współczynnik b jest w stosunku do a bardzo mały i wynosi około 0,0002 do 0,0004 mgal/dz² ($a \cong 9$ mgal/dz), zaś błąd wyznaczenia go waha się w granicach od $\pm 0{,}00005$ do $\pm 0{,}00015$ mgal/dz². Dane te otrzymano dla wyjątkowo dobrze pracującego egzemplarza grawimetru Gs-11 jakim jest egzemplarz nr 112. W innych egzemplarzach, jak np. nr 110, błąd wyznaczenia współczynnika b tą metodą dochodzi nawet do $\pm 0{,}0003$, a więc jest równy wielkości samego współczynnika. Wpływ błędu wyznaczenia współczynnika b na pomiar Δg jest dość duży i tym większy od wpływu błędu współczynnika a, im większa jest mierzona różnica Δg i im bliżej końca podziałki grawimetru nastąpił pomiar. W tablicy 1 pokazany jest wpływ błędu wyznaczenia współczynników a i b na dokładność pomiaru Δg.

Tablica 1

Δg mgal	ΔM dz	ΣM dz	$m_{\Delta g_a}$ mgal	$m_{\Delta g_b}$ mgal	$m_{\Delta g_{ab}}$ mgal
100	10	10	±0,04	±0,01	±0,04
100	10	150	0,04	0,14	0,15
200	20	20	0,09	0,04	0,10
200	20	140	0,09	0,25	0,27
300	30	30	0,14	0,08	0,16
300	30	130	0,14	0,35	0,38
400	40	40	0,18	0,14	0,23
400	40	120	0,18	0,43	0,47
500	50	50	0,22	0,22	0,31
500	50	110	0,22	0,50	0,55
600	60	60	0,27	0,32	0,42
600	60	100	0,27	0,54	0,60
700	70	70	0,32	0,44	0,54
700	70	90	0,32	0,57	0,65
800	80	80	0,36	0,58	0,68

Przy konstrukcji tablicy 1 oparto się na następujących danych: obliczając błąd $m_{\Delta g_{ab}}$ różnicy Δg, uwzględniono tylko wpływ błędów współczynników a i b, pomijając wpływ błędu M. Do obliczenia błędu $m_{\Delta g_{ab}}$ wykorzystano wzór:

$$m_{\Delta g_{ab}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial b}\right)^2 m_b^2}. \tag{65}$$

Do obliczenia pochodnych cząstkowych występujących we wzorze (65) wykorzystano wzór (22) i otrzymano:

$$m_{\Delta g_{ab}} = \pm \sqrt{\Delta M^2 m_a + (\Delta M \sum M)^2 m_b^2}. \tag{66}$$

Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe: $\frac{\Delta g}{\Delta M} \cong 10$ mgal/dz, średnie błędy wyznaczenia współczynników a i b na podstawie jednego cechowania $m_a = \pm 0{,}0045$ mgal/dz oraz $m_b = \pm 0{,}00009$ mgal/dz^2.

Z powyższych rozważań wynika, że należy poszukać jeszcze innych, dokładniejszych sposobów wyznaczania współczynnika b.

Obecnie omówimy sposób niezależnego wyznaczenia współczynnika b, który naszkicowany został w opublikowanej już pracy [8].

Weźmy pod uwagę wzór (21). W szczególnym przypadku, gdy robimy odczyty przy różnych położeniach kulki urządzenia do cechowania na jednym stanowisku, tj. gdy $\Delta g = 0$, ze wzoru tego otrzymamy:

$$E\,(a + b\Sigma M_E) - gc = 0, \tag{67}$$

gdzie przez E oznaczamy różnicę odczytów podziałki grawimetru (ΔM) przy zmianie położenia kulki bez zmiany stanowiska, a więc dla $\Delta g = 0$, a przez ΣM_E — odpowiadającą E sumę odczytów podziałki. Omawiany wypadek szczególny mogliśmy określić wzorem (67) gdyż $C \neq 1$, a więc $(1 - C) \neq 0$. Zagadnienie stałej C i c omówione jest szerzej w rozdziale 7.

Ponieważ w dalszym toku rozważań potrzebne nam będą przekształcenia wzoru (67), od razu je tu wyprowadzimy:

$$c = \frac{E(a + b \sum M_E)}{g}, \tag{67 a}$$

$$E = \frac{cg}{a + b \sum M_E} \tag{67b}$$

$$b = \frac{cg}{E \sum M_E} - \frac{a}{\sum M_E}. \tag{67c}$$

Zastanówmy się obecnie, czy na podstawie pomiaru E i zastosowania wzoru (67c) można by wyliczyć współczynnik b. Weźmy na razie pod uwagę tylko błąd $\left(\frac{m_b}{b}\right)_c$, tj. błąd względny m_b wyznaczenia współczynnika b powstały na skutek istnienia błędu m_c stałej c. Ponieważ:

$$\frac{\partial b}{\partial c} = \frac{g}{E \sum M_E},$$

więc:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)_c = \pm \frac{g}{Eb \sum M_E} m_c .$$

Wstawiając orientacyjne wartości liczbowe poszczególnych składników powyższego wzoru (tablica 2), otrzymamy:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)_c = \pm \frac{7 \cdot 10^3}{\sum M_E},$$

a więc w najkorzystniejszym przypadku, gdy $\Sigma M_E \cong 150$ dz, $\left(\frac{m_b}{b}\right)_c = \pm 47$, czyli błąd wyznaczenia współczynnika b byłby około 50 razy większy od jego wartości.

Zastanówmy się jednak nad możliwością wyznaczenia współczynnika b ze zmian wartości E na skutek zmiany ΣM_E i g.

Ponieważ wartości g mamy zawsze dane z dokładnością 5—6 cyfr znaczących, nawet jeśli operujemy wartościami przybliżonymi, a ΣM_E znamy z pomiaru z dokładnością odczytu, ze zmian wartości E, mierzonych w różnych miejscach podziałki, możemy znaleźć ich zależność od zmian ΣM_E, a więc współczynnik b. Jak się okaże dalej, wartości a i c, do wyznaczenia współczynnika b ze zmian wartości E, wystarczy znać w przybliżeniu.

Zależność współczynnika b od zmian wartości E, spowodowanych zmiennością ΣM_E i g, obliczymy rozwijając funkcję określoną przez wzór (67b) w szereg Taylora, ograniczając się do wyrazów pierwszego rzędu:

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial (\sum M_E)} \Delta (\sum M_E) + \frac{\partial E}{\partial g} \Delta g,$$

stąd:

$$\Delta E = - \frac{E^2 b}{cg} \Delta (\sum M_E) + \frac{E}{g} \Delta g,$$

a następnie:

$$b = \frac{cg}{\Delta E (\sum M_E)} \left(\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta E}{E}\right). \tag{68}$$

W celu obliczenia wpływu poszczególnych składników wzoru (68) na dokładność wyznaczenia współczynnika b, posłużymy się wzorem:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)_x = \pm \frac{\partial b}{\partial b_x} m_x, \tag{69}$$

gdzie $\left(\frac{m_b}{b}\right)_x$ jest błędem względnym współczynnika b spowodowanym przez błąd dowolnego składnika (x) prawej strony równania (68). Różniczkując następnie wzór (68) względem poszczególnych składników, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial c} &= \frac{b}{c}, \\
\frac{\partial b}{\partial g} &= -\frac{c\Delta E}{\Delta(\sum M_E)E^2}, \\
\frac{\partial b}{\partial \Delta(\sum M_E)} &= -\frac{b}{\Delta(\sum M_E)}, \\
\frac{\partial b}{\partial E} &= \frac{cg\Delta E - bE^2\Delta(\sum M_E)}{\Delta(\sum M_E)E^3}, \\
\frac{\partial b}{\partial \Delta g} &= \frac{c}{\Delta(\sum M_E)E}, \\
\frac{\partial b}{\partial(\Delta E)} &= -\frac{cg}{\Delta(\sum M_E)E^2}.
\end{aligned} \tag{70}$$

W celu obliczenia przybliżonych wartości liczbowych błędów $\left(\frac{m_b}{b}\right)_x$ musimy przyjąć orientacyjne wartości poszczególnych elementów. Wartości te podano w tablicy 2, przyjmując, że ΔE wyznaczono z pomiarów na krańcach podziałki grawimetru.

Tablica 2

x		m_x	jednostki
g	$1 \cdot 10^6$	± 2	mgal
Δg	$7 \cdot 10^2$	2	mgal
E	4,5	$2 \cdot 10^{-3}$	dz*)
ΔE	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$	dz
$\Delta(\Sigma M_E)$	$1{,}5 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^{-2}$	dz
c	$4{,}2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$	—
b	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$		mgal/dz^2

*) dz — działka podziałki grawimetru.

Wartości liczbowe poszczególnych błędów $\left(\frac{m_b}{b}\right)_x$, zestawiono w tablicy 3.

Jak widać z tablicy 3, decydujący wpływ na dokładność obliczenia b ma dokładność pomiaru ΔE.

Z pozostałych wartości największy wpływ ma dokładność wartości c, jest on jednak przeszło 10-cio krotnie mniejszy od wpływu dokładności ΔE. Przybliżoną wartość c możemy wyznaczyć z wzoru (67a), wykonując wielokrotnie pomiary E na jednym lub kilku stanowiskach i stosując przybliżone wartości a i b. Zagadnienie wyznaczania wartości stałej c opisane jest obszernie w rozdziale 7.

Jak wynika z wzoru (68), wartość współczynnika a wpływa tylko pośrednio na wyznaczenie współczynnika b, a mianowicie przez to, że jej przybliżona wartość potrzebna jest do wyznaczenia stałej c. Dokładność pozostałych wielkości, potrzebnych do obliczenia współczynnika b, nie mają praktycznie wpływu na dokładność tej ostatniej.

Tablica 3

x	$\left(\frac{m_b}{b}\right)_x$
c	$\pm 0{,}25 \cdot 10^{-2}$
g	$0{,}0002 \cdot 10^{-2}$
$\Delta(\Sigma M_E)$	$0{,}007 \cdot 10^{-2}$
Δg	$0{,}04 \cdot 10^{-2}$
E	$0{,}006 \cdot 10^{-2}$
ΔE	$3 \cdot 10^{-2}$

Ponieważ wpływ błędu pomiaru ΔE jest tym mniejszy, im większe jest $\Delta(\Sigma M_E)$, co wynika z (70), pomiary E do wyznaczenia ΔE należy przeprowadzić na brzegach podziałki grawimetru.

W wypadku pomierzenia wartości E tylko na dwóch punktach, współczynnik b wyznaczamy z wzoru (68). Ponieważ wartość E można mierzyć nie tylko na dwóch punktach ale na szeregu punktów, na których pomiar wypada na różnych miejscach podziałki, możliwe jest z dużej ilości pomiarów wartości E wypośrodkować krzywą przedstawiającą funkcję $E = f(\Sigma M_{E,\,g})$, określoną wzorem (67b), z której to krzywej będzie można wyznaczyć wiele wartości ΔE. Zagadnienie wyznaczenia krzywej $E = f(\Sigma M_{E,\,g})$ z wielu pomiarów E oraz zagadnienie wyznaczenia współczynnika b, mając daną tę krzywą, można rozwiązać jako jeden problem wyrównawczy.

Zastosujemy tu następujące postępowanie. Do wyrównania pomierzonych wartości E, określonych wzorem (67b), zastosujemy metodę spostrzeżeń pośrednich. Ze względu na to, że wartości ΣM_E i g znamy dużo dokładniej niż pozostałe argumenty, traktować je będziemy jako współczynniki nie podlegające wyrównaniu. Natomiast wartości a, b i c będą podlegały procesowi wyrównania. Zatem wartość zaobserwowana E jest funkcją:

$$E = f(a, b, c),$$

a więc błąd zaobserwowania i-tej wartości E [10] będzie równy:

$$v_i = \frac{\partial E}{\partial a} da + \frac{\partial E}{\partial b} db + \frac{\partial E}{\partial c} dc + E_0 - E_i,$$

Podstawiając wartości odpowiednich pochodnych cząstkowych, z uproszczeniami wynikającymi z tego, że b jest wielkością małą, przez co można przyjąć $b_0 = 0$, otrzymamy:

$$v_i = -\frac{c_0 g}{a_0^2} da - \frac{c_0 g \sum M_E}{a_0^2} b + \frac{g}{a_0} dc + E_0 - E_i.$$

Indeks 0 oznacza tu wartości przybliżone.

Jak wynika z poprzednich rozważań dokładnościowych, wpływ błędów wartości a i c na zmienność wartości E jest mały. Wobec tego wielkości da i dc są słabo wyznaczalne w procesie wyrównania i nie można ich praktycznie wykorzystać do udokładnienia wartości a i c. Służą one tylko do wyeliminowania wpływu niedokładności przyjętych przybliżeń tych wartości na obliczenie współczynnika b. Zatem dla zmniejszenia liczby niewiadomych, możemy je połączyć i traktować jako jedną poprawkę. A więc będziemy mieli:

$$v_i = \frac{c_0 g}{a_0^2} df - \frac{c_0 g \sum M_E}{a_0^2} b + E_0 - E_i, \tag{71}$$

gdzie: $df = \frac{a_0}{c_0} dc - da$ oraz $E_0 = \frac{c_0 g}{a_0}$. Rozwiązując układ równań błędów (71), otrzymujemy od razu wartość współczynnika b.

Opisaną metodą wykonano dotychczas w Instytucie Geodezji i Kartografii w latach 1961—63 pięć cechowań. Średni błąd wyznaczenia współczynnika b w poszczególnych cechowaniach wynosił od $\pm 0{,}000029$ do $\pm 0{,}000054$ mgal/dz^2. Średni błąd średniej wartości współczynnnika b, wyznaczonej z tych pięciu cechowań, wyniósł $\pm 0{,}000019$ mgal/dz^2. W porównaniu z błędem średnim współczynnika b, obliczanego z jednego cechowania łącznie ze współczynnikiem a, metoda ta daje zdecydowanie lepsze wyniki.

Dla uzupełnienia tablicy 1, podano poniżej wpływ średniego błędu wyznaczenia współczynnika b tą metodą na dokładność wyznaczenia różnicy przyspieszenia siły ciężkości $\Delta g = 800$ mgal z pomiaru. Do obliczeń przyjęto: przeciętny średni błąd wyznaczenia współczynnika b z jednego cechowania $m_{b1} = \pm 0{,}000037$ mgal/dz^2 oraz średni błąd średniej wartości współczynnika b, otrzymanej z pięciu cechowań $m_{b5} = \pm 0{,}000019$ mgal/dz^2. Wpływ tych błędów na dokładność wyznaczenia Δg przedstawia się następująco: $m_{\Delta g b1} = \pm 0{,}24$ mgal, $m_{\Delta g b5} = \pm 0{,}12$ mgal.

Po wyznaczeniu współczynnika b na podstawie pomiaru E, współczynnik a możemy wyznaczyć w taki sposób, jaki omówiony został w p. 5.1.1. o łącznym wyznaczaniu obu tych współczynników. Wykorzystując ten sposób trzeba pamiętać, że współczynnik b traktować teraz będziemy jako wartość stałą, niepodlegającą wyrównaniu. Zatem punktem wyjścia będzie wzór (58):

$$M = \frac{g_r}{a} - \frac{b}{a} M^2.$$

Ogólne równanie poprawek będzie teraz miało postać:

$$v_i = \frac{\partial M}{\partial g_r} dg_r + \frac{\partial M}{\partial a} da + M_0 - M_i . \tag{72}$$

Pomijając wyprowadzenie wzoru szczegółowego, które będzie identyczne jak w punkcie 5.1.1., możemy napisać równanie poprawek w wersji uproszczonej, podobnie jak (63):

$$v_i^* = dg_{rn} + \Delta M_i da + (M_0 - M_i)\, a. \tag{73}$$

W celu wyznaczenia współczynników a i b w wyżej opisany, niezależny sposób, pomiary cechujące należy wykonać na bazie obejmującej swym zasięgiem wartości g cały zakres podziałki grawimetru lub na dwóch bazach, obejmujących początek i koniec podziałki. Ponadto na każdym punkcie pomiarowym odczyty należy wykonać przy dwóch położeniach kulki urządzenia do cechowania.

Wyznaczenie współczynnika b można wykonać również metodą podaną przez Dobbersteina [6]. Polega ona na pomiarze różnic E między odczytami podziałki grawimetru przy obu położeniach kulki tylko na jednym stanowisku np. w laboratorium. Odczyty na całej podziałce uzyskuje się przez wielokrotną zmianę zakresu pomiarowego grawimetru. Metoda ta, którą można by nazywać laboratoryjną w odróżnieniu od podanej wyżej, którą można by nazywać polową, jest chyba mniej dogodna, gdyż wymaga wielokrotnego otwierania wnętrza grawimetru, co w typie Askania Gs-11 jest dość kłopotliwe. Poza tym między kolejnymi przestawieniami zakresu konieczne są przerwy w pracy co najmniej na przeciąg 1 doby, aby zlikwidować zmianę warunków termicznych, wywołaną przez wyjęcie instrumentu z termostatu. Ponadto wyznaczenie współczynnika b tą metodą laboratoryjną odbywa się w zupełnie innych warunkach niż pomiar, przez co nie jest zachowana zasada mierzenia i cechowania w identycznych warunkach. Oczywiście wszystkie wzory podane tutaj są również ważne i dla metody laboratoryjnej. W tym wypadku mielibyśmy $g = \text{const}$, a $\Delta g = 0$.

5.2. *Cechowanie grawimetru przy zastosowaniu wzorów szczegółowych, wynikających z teorii sprężyny śrubowej*

Jeśli do opracowywania wyników pomiaru Δg grawimetrem Gs-11 stosować będziemy wzory szczegółowe, wyprowadzone w p. 4.2. w oparciu o teorię sprężyny śrubowej, to przedtem trzeba wykonać cechowanie grawimetru, które dzieli się na dwie zasadnicze części:

1. wyznaczenie długości drutu L i długości H_0 sprężyny pomiarowej grawimetru w celu określenia współczynników funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$ (40), (42);

2. wyznaczenie współczynnika A na podstawie pomiarów na bazie grawimetrycznej.

Obecnie przejdziemy do omówienia sposobów realizacji tych dwóch zasadniczych części cechowania.

5.2.1. *Wyznaczenie długości drutu L i długości H_0 sprężyny pomiarowej grawimetru, w celu określenia współczynników funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$.*

Ostateczna postać funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$, którą określają wzory (40), (42), (31), (34), (39), (27) i (29), jest następująca:

$$F(M) = 1+\frac{2H_0}{L^2-H_0^2}M+\frac{L^2+3H_0^2}{(L^2-H_0^2)^2}M^2+\frac{4H_0(L^2-H_0^2)+8H_0^3}{(L^2-H_0^2)^3}M^3+\dots \quad (75)$$

$$f(M,\Delta M) = 1+\frac{2H_0}{L^2-H_0^2}(2M+\Delta M)+\frac{L^2+3H_0^2}{(L^2-H_0^2)^2}(3M^2+3M\Delta M+\Delta M^2)+$$

$$+\frac{4H_0(L^2-H_0^2)+8H_0^3}{(L^2-H_0^2)^3}(4M^3+6M^2\Delta M+4M\Delta M^2+\Delta M^3)+\dots \quad (76)$$

Jak widać z przytoczonych wzorów, do wyznaczenia współczynników tych funkcji wystarczy znać dwie wielkości: długość drutu L sprężyny pomiarowej i jej długość przy nastawieniu podziałki grawimetru na zero — H_0. Jednak ze względu na konieczność zachowania zgodności jednostek, wielkości te musimy znać w jednostkach działek podziałki grawimetru (dz), gdyż argumentem funkcji (75) i (76) są bezpośrednie odczyty podziałki M. Zatem dla prawidłowego określenia liczbowego tych funkcji musimy jeszcze wyznaczyć wartość jednej działki (1 dz) podziałki grawimetru w milimetrach, tj. w jednostkach pomiaru L i H_0.

W celu ustalenia sposobu i dokładności wyznaczenia tych wielkości przeprowadzimy analizę, której punktem wyjścia będzie założona dokładność wyznaczenia funkcji $f(M, \Delta M)$.

Różnicę przyspieszenia siły ciężkości Δg obliczaną z pomiaru grawimetrem przy zastosowaniu funkcji $f(M, \Delta M)$ określa wzór (43):

$$\Delta g = A\Delta M f(M, \Delta M).$$

Wobec tego wpływ błędu funkcji $f(M, \Delta M)$ na pomiar Δg będzie równy:

$$m_{\Delta g_f} = A \Delta M \, m_f . \tag{77}$$

Maksymalna dokładność, jaką można uzyskać przy pomiarach Δg grawimetrem Askania Gs-11 — oceniana dość optymistycznie — wynosi 0,01 mgal (w układzie działek skali a nie cgs). Jeżeli wobec tego założymy, że średni błąd pomiaru Δg, wywołany przez błędność funkcji $f(M, \Delta M)$, oznaczony we wzorze (77) przez $m_{\Delta g_f}$, nie powinien przekraczać $\pm 0{,}005$ mgal dla całego zakresu pomiaru grawimetru, tj. dla $\Delta M = 80$ dz, to spełnienie takiego założenia będzie stanowiło istotny postęp w stosunku do metody obliczania pomiarów przy zastosowaniu wzoru z dwoma współczynnikami *a* i *b*. Porównując założoną dokładność z podanym w p. 5.1.2. wpływem na pomiar różnicy Δg, wynoszącej 800 mgal, średniego błędu wyznaczenia współczynnika *b*, którego odpowiednikiem w omawianej obecnie metodzie jest funkcja $f(M, \Delta M)$ zauważymy, że dokładność ta będzie około 50 razy większa przy wykorzystaniu wyników jednego cechowania, a nawet przy wykorzystaniu średniej z pięciu cechowań będzie jeszcze około 25 razy większa.

Przyjmując zatem $m_{\Delta g_f} = \pm 0{,}005$ mgal, $\Delta M = 80$ dz, $A \cong 10$ mgal/dz, otrzymamy:

$$m_f = \frac{m_{\Delta g_f}}{A \Delta M} = \pm 6 \cdot 10^{-6} \tag{78}$$

Mając dane m_f możemy obecnie przejść do obliczenia dokładności wyznaczenia L i H_0. Do analizy wstępnej weźmiemy na razie pod uwagę tylko pierwszy wyraz wzoru (76). Ponieważ L jest przeszło 30 razy większe od H_0, do analizy dokładnościowej możemy przyjąć $L^2 - H_0^2 \cong L^2$. Najpierw obliczymy wpływ błędu M i ΔM na dokładność wyznaczenia $f(M, \Delta M)$ aby dowieść, iż wpływ ten jest nieistotny. Przyjmujemy zatem:

$$f(M, \Delta M) \cong 1 + \frac{2H_0}{L^2}(2M + \Delta M), \tag{79}$$

a stąd

$$m_{f_M} = \frac{4H_0}{L^2} m_M, \quad \text{oraz} \quad m_{f_{\Delta M}} = \frac{2H_0}{L^2} m_{\Delta M} .$$

Ponieważ $\Delta M = M_2 - M_1$, więc $m_{\Delta M} = m_M \sqrt{2}$ oraz $m_{f_{M \Delta M}} = \sqrt{m_{f_M}^2 + m_{f_{\Delta M}}^2}$ więc ostatecznie:

$$m_{f_{M \Delta M}} = 2\sqrt{6} \, \frac{H_0}{L^2} m_M . \tag{80}$$

Przybliżone wartości składników wzoru (80) są następujące:

$$H_0 = 1 \cdot 10^2 \text{ dz}, \ L = 3{,}3 \cdot 10^3 \text{ dz i } m_M = \pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ dz}.$$

A więc:

$$m_{f_{M \Delta M}} = \pm 5 \cdot 10^{-8} . \tag{81}$$

Z porównania wielkości (78) i (81) widać jasno, że średni błąd odczytu podziałki M nie ma praktycznie żadnego wpływu na dokładność wyznaczenia funkcji $f(M, \Delta M)$.

Obliczymy więc teraz z jaką dokładnością musimy znać długość drutu sprężyny L i jej długość H_0 aby uzyskać założoną dokładność $m_f = \pm 6 \cdot 10^{-6}$ (78). Z wzoru (79) łatwo można wyznaczyć:

$$m_{f_{H_0}} = \frac{2(2M+\Delta M)}{L^2} m_{H_0} \quad \text{i} \quad m_{f_L} = -\frac{4H_0(2M+\Delta M)}{L^3} m_L,$$

a stąd:

$$m_{H_0} = \frac{L^2}{2(2M+\Delta M)} m_{f_{H_0}} \quad \text{i} \quad m_L = -\frac{L^3}{4H_0(2M+\Delta M)} m_{f_L}. \tag{82}$$

Podstawiając podane wyżej przybliżone wartości L i H_0 i założone $\Delta M_{max} = 80$ dz (a stąd $M = 0$), otrzymamy:

$$m_{H_0} = 6 \cdot 10^5 m_{f_{H_0}} \text{ dz} \quad \text{i} \quad m_L = -1 \cdot 10^6 m_{f_L} \text{ dz}. \tag{83}$$

Ponieważ długości drutu sprężyny L nie można zmierzyć bezpośrednio, należy pomierzyć jej średnicę d, oraz zastosować wzór:

$$L = \pi d n, \tag{84}$$

gdzie n oznacza ilość zwojów sprężyny. Ze wzoru (84) będziemy mieli:

$$m_L = \pi n m_d. \tag{85}$$

Wstawiając (85) do (83) i wiedząc, że ilość zwojów sprężyny pomiarowej wynosi około 100, otrzymamy:

$$m_{H_0} = 6 \cdot 10^5 m_{f_{H_0}} \text{ dz} \quad \text{i} \quad m_d = -3{,}2 \cdot 10^3 m_{f_L} \text{ dz}. \tag{86}$$

Oczywiste jest, że

$$m_f = \sqrt{m_{f_{H_0}}^2 + m_{f_L}^2}. \tag{87}$$

Wobec tego jeśliby się przyjęło:

$$m_{f_{H_0}} = m_{f_L} = \frac{m_f}{\sqrt{2}},$$

to z wzorów (78) i (86) otrzymalibyśmy następujące dane co do dokładności pomiaru H_0 i d:

$$m_{H_0} = \pm 2{,}6 \text{ dz} \quad \text{i} \quad m_d = \pm 0{,}014 \text{ dz}.$$

Celem uniknięcia dysproporcji w dokładności pomiaru tych dwóch elementów oraz dla uzyskania jak najmniejszej (bezwzględnej) wartości m_d, należy przyjąć:

$$m_{f_L} = m_f.$$

W tym wypadku przyjęcie już $m_{f_{H_0}} = 0{,}1\, m_f$ wystarczy dla praktycznej realizacji wzoru (87). Przy tych założeniach będziemy mieli:

a więc:

$$\left.\begin{array}{c} m_{H_0} = \pm 0{,}36 \text{ dz} \quad \text{i} \quad m_d = \pm 0{,}02 \text{ dz}, \\ m_L = \pm 6 \text{ dz}. \end{array}\right\} \tag{88}$$

Ponieważ wartość jednej działki podziałki grawimetru 1 dz = 0,5 mm, więc ostatecznie otrzymamy następujące kryteria dokładności pomiaru długości sprężyny H_0 i jej średnicy d dla uzyskania średniego błędu funkcji $f(M, \Delta M)$ równego $m_f = \pm 6 \cdot 10^{-6}$:

$$\left.\begin{aligned} m_{H_0} = \pm 0{,}18 \text{ mm} \quad \text{i} \quad m_d = \pm 0{,}01 \text{ mm} \\ \text{oraz} \qquad m_L = \pm 3 \text{ mm.} \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

W przeprowadzonej analizie dokładnościowej brany był pod uwagę tylko pierwszy wyraz (poza jednością) we wzorze (76), określającym funkcję $f(M, \Delta M)$. Należy zatem jeszcze obliczyć dokładność wyznaczenia dalszych wyrazów wzoru (76) przy dokładności określenia elementów długościowych L i H_0 podanych w (88). Pomijając elementarne wyprowadzenia wzorów, w tablicy 4 podane są wartości liczbowe wpływu błędów średnich L, H_0 i M na obliczenie drugiego i trzeciego wyrazu we wzorze (76). Dla przejrzystości w tablicy 4 powtórzono także te same wartości odnośnie pierwszego wyrazu tego wzoru.

Jak wynika z liczb zamieszczonych w tablicy 4, założenia robione w toku wykonywania powyższej analizy dokładnościowej są — praktycznie biorąc — słuszne, a jej wyniki miarodajne.

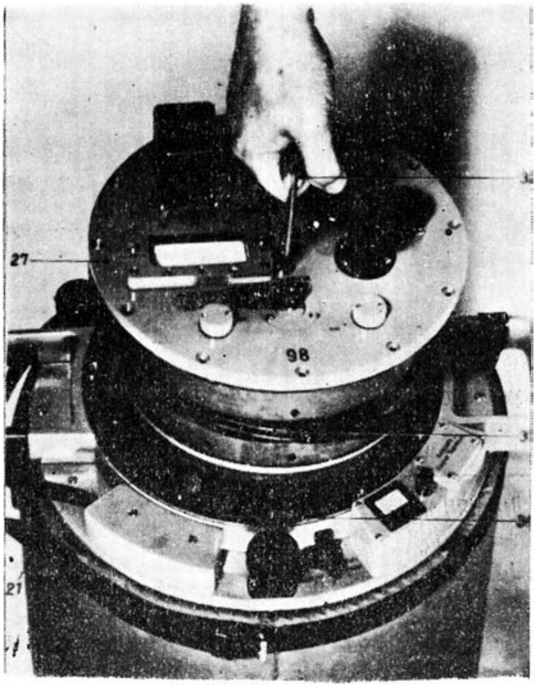
Tablica 4

wyraz	m_{f_L}	$m_{f_{H_0}}$	$m_{f_{M\Delta M}}$	$\sqrt{[mm]}$
1	$\pm 6 \cdot 10^{-6}$	$\pm 6 \cdot 10^{-7}$	$\pm 5 \cdot 10^{-8}$	$\pm 6{,}03 \cdot 10^{-6}$
2	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$	0	$3 \cdot 10^{-8}$	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$
3	$1{,}5 \cdot 10^{-8}$	$0{,}7 \cdot 10^{-8}$	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$	$0{,}02 \cdot 10^{-6}$
średni całkowity błąd m_f				$\pm 6{,}5 \cdot 10^{-6}$

Obecnie opisana zostanie metoda pomiaru elementów długościowych sprężyny pomiarowej grawimetru Gs-11. Podany zostanie jako przykład opis konkretnego pomiaru tych elementów w egzemplarzu nr 112 tego typu grawimetru.

Pomiar elementów sprężyny grawimetru jest zagadnieniem dość trudnym z technicznego punktu widzenia z uwagi na dwa warunki, które należy spełnić. Pierwszy warunek — to wymagana wysoka dokładność pomiaru średnicy sprężyny, wynosząca 0,01 mm (89). Drugi warunek — to konieczność wykonania pomiaru pośredniego, gdyż sprężyny nie można dotykać bezpośrednio, bo jest ona elementem grawimetru bardzo czułym i delikatnym i dotykanie jej mogłoby odbić się ujemnie na późniejszej pracy instrumentu, a poza tym umieszczona ona jest tak wewnątrz grawimetru, że bezpośredni dostęp do niej jest mocno utrudniony.

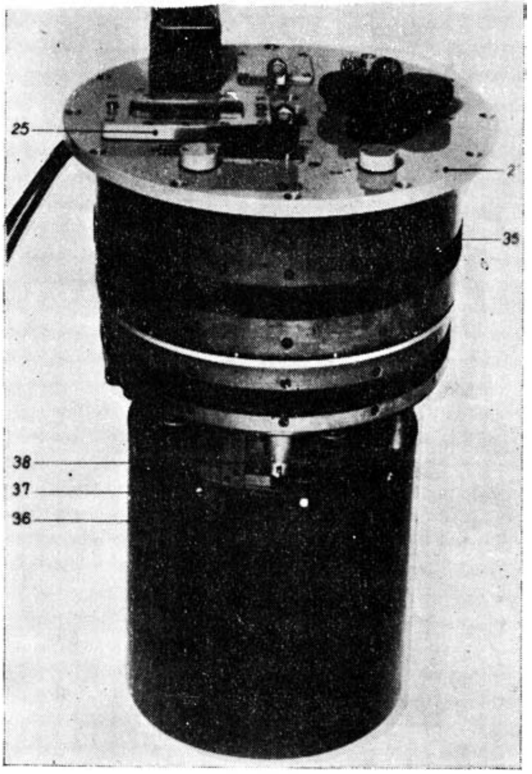
Zagadnienie to rozwiązane zostało przez autora w stosunkowo prosty sposób. Zastosowano mianowicie do pomiaru pośredniego teodolit Wild T3. Jak wiadomo, dokładność odczytu kół tego instrumentu szacuje się na około 0,2″. Najmniejsza odległość z jakiej można obserwować przez ten instrument wynosi około 5 m. Zatem dla tej odległości — pomijając na razie błąd pomiaru tej odległości — średni błąd odczytu koła odpowiadać będzie elementowi długości prostopadłej do celowej równemu 0,005 mm, co w zupełności odpowiada warunkom dokładnościowym pomiaru.



Rys. 3

Dla uzyskania takiego dostępu do sprężyny pomiarowej grawimetru, aby można ją było swobodnie obserwować, należy wykonać szereg czynności, których opis zamieszczony jest poniżej. Przy omawianiu części grawimetru zastosowano nomenklaturę i oznaczenia z instrukcji firmy Askania [2]. Dla ułatwienia na rysunkach 3, 4 i 5 podane są reprodukcje trzech fotografii z tego opracowania.

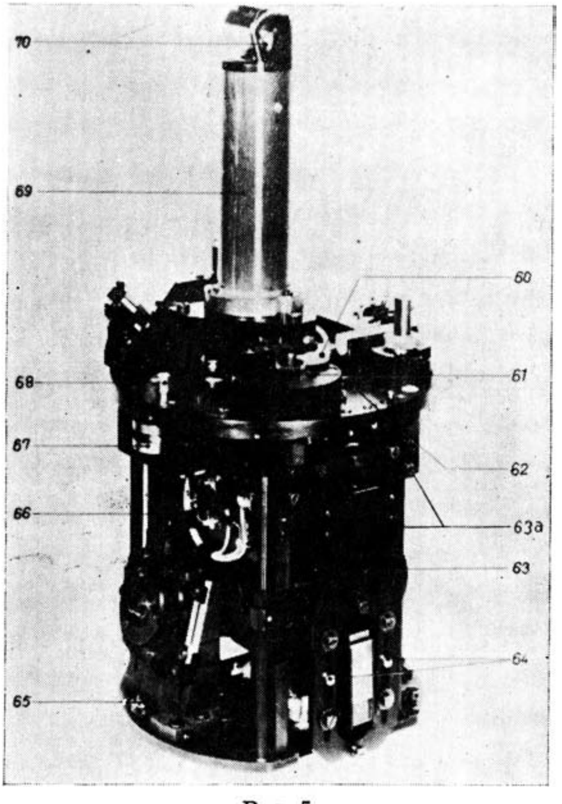
Pierwszą czynnością jaką należy wykonać dla uzyskania dostępu do sprężyny pomiarowej jest wyjęcie grawimetru z płaszcza ochronnego, zawierającego termostaty (rys. 3). Potem należy usunąć cylinder ochronny (rys. 4, poz. 36) przez odkręcenie ośmiu śrub (rys. 4, poz. 37). Następnie po odaretowaniu grawimetru usuwamy sprężynującą płytę aretującą (rys. 5, poz. 63) przez odkręcenie 4 śrub (rys. 5, poz. 63a). Ostatnią czynność należy wykonać bezpośrednio przed pomiarem po uprzednim, stabilnym ustawieniu grawimetru, gdyż od tego momentu układ sprężynowy grawimetru pozostanie odaretowany. W tym stanie sprężyna pomiarowa będzie dostępna obserwacjom tak, jak to pokazuje rys. 6.



Rys. 4

Tak przygotowany grawimetr ustawiony został na słupie betonowym w laboratorium na specjalnej podstawce, która umożliwiała poziomowanie grawimetru i jego obrót wokół osi pionowej, co było bardzo dogodne przy ustawianiu go w najwłaściwszej pozycji do obserwacji.

Do obliczenia elementów długościowych sprężyny z pomiarów kątowych teodolitem, konieczna jest znajomość odległości osi sprężyny od osi teodolitu. Ponieważ sama sprężyna nie mogła służyć za punkt przyłożenia przymiaru długościowego, na wierzchu słupa betonowego, na którym ustawiono grawimetr, położony był karton, na który rzutowano oś pionową sprężyny. W tym celu ustawiono obok słupa z grawimetrem drugi mały teodolit (Fennel) tak, że osie celowe obu teodolitów skierowane na grawimetr przecinały się w przybliżeniu pod kątem prostym. Osie celowe tych dwóch teodolitów, zrzutowane graficznie na wspomniany karton, służyły do wyznaczania końców odległości teodolitu pomiarowego T3 od osi sprężyny oraz podziałki. Na rys. 7 pokazany jest sposób ustawienia grawimetru na słupie na specjalnej podstawce; widać na nim także rzuty pionowe osi celowych teodolitów, wrysowane na karton leżący pod grawi-



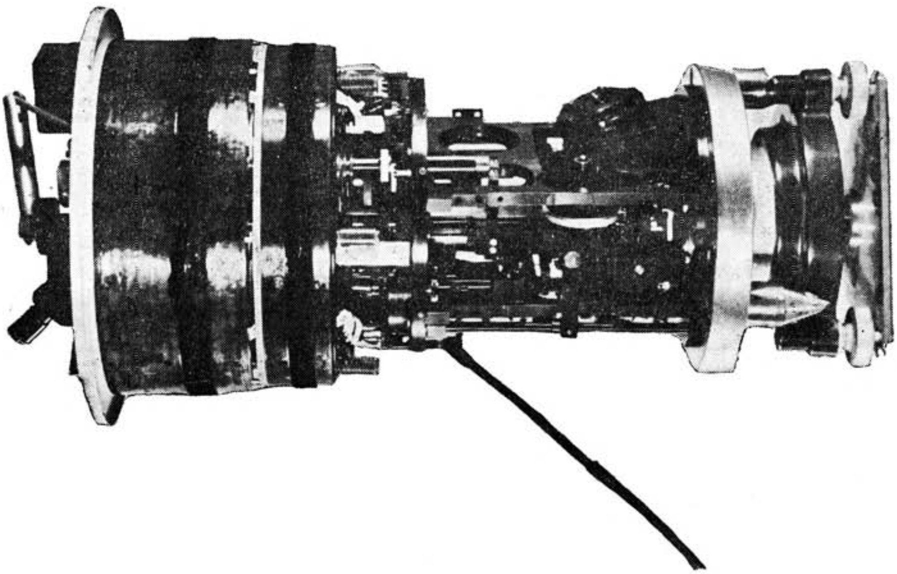
Rys. 5

metrem, które przecinając się wyznaczają rzuty pionowe mierzonych elementów grawimetru na płaszczyznę poziomą — górną podstawę słupa.

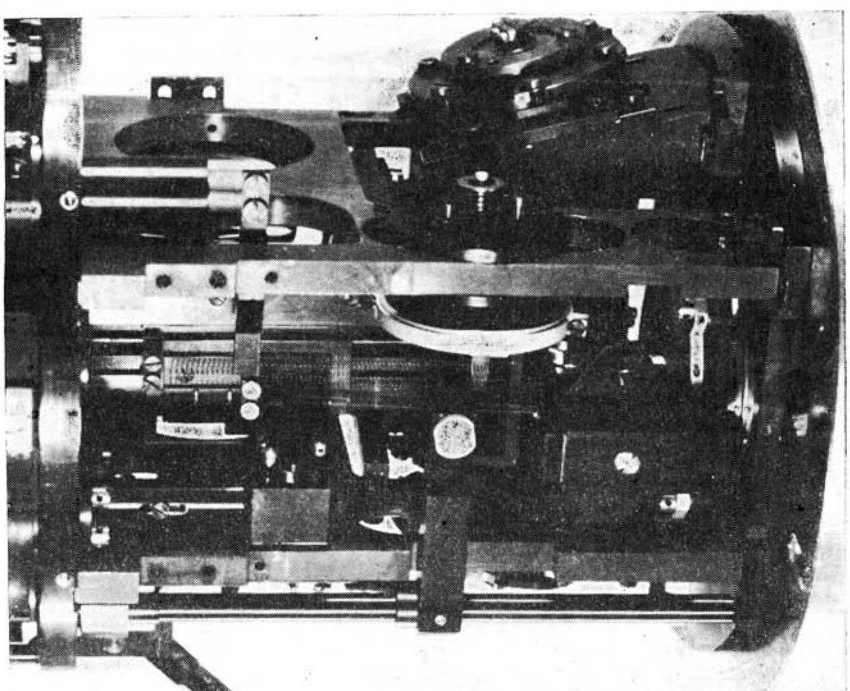
Obecnie przejdziemy do sposobu pomiaru i obliczenia poszczególnych elementów.

W a r t o ś ć 1 d z i a ł k i (1 d z) p o d z i a ł k i g r a w i m e t r u w m i l i m e t r a c h. Dla obliczenia długości podziałki pomierzono kąt pionowy pomiędzy skrajnymi kreskami podziałki tj. -1 i 81. Kąt ten pomierzono w dwóch położeniach lunety, dziesięciokrotnie przy każdym położeniu. Średni błąd tak pomierzonego kąta pionowego wyniósł $\pm 0{,}14''$. Do obliczenia długości całej podziałki h wykorzystuje się wzór:

$$h = b \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}, \tag{90}$$

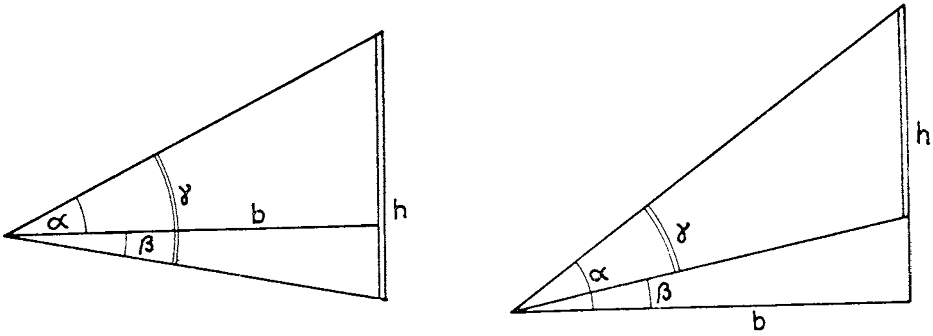


Rys. 7



Rys. 6

gdzie: b — odległość podziałki od teodolitu, α, β — wysokości celowych na skrajne kreski podziałki, γ — kąt pionowy między skrajnymi kreskami podziałki (rys. 8). Wartość 1 dz uzyskano przez podzielenie długości całej



Rys. 8

podziałki przez ilość działek między kreskami skrajnymi, tj. przez 82. Otrzymano wartość:

$$1 \text{ dz} = 0{,}499988 \text{ mm} \pm 0{,}000050 \text{ mm}. \tag{91}$$

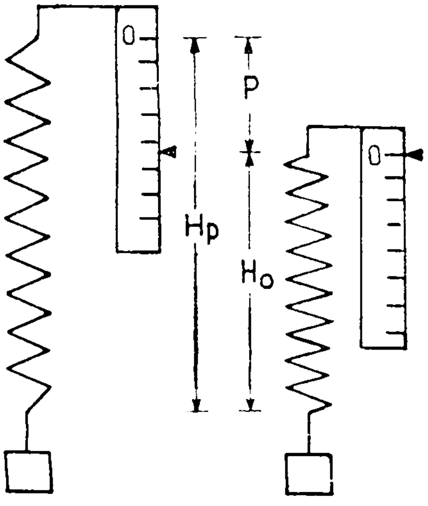
Podziałkę grawimetrów typu Askania Gs-11 stanowi płytka szklana z wniesionym na niej podziałem w postaci kresek. Jest ona zatem prawdopodobnie robiona na maszynach podziałowych w systemie metrycznym i powinna wynosić dokładnie 0,5 mm. Wartość (91) różni się zatem od wartości teoretycznej o 0,000012 mm co stanowi dodatkową ocenę dokładności jej wyznaczenia.

D ł u g o ś ć s p r ę ż y n y H_0 d l a o d c z y t u p o d z i a ł k i r ó w n e g o z e r o. Najdokładniej wartość tę można uzyskać przez pomiar długości H_p sprężyny dla takiego ustawienia podziałki, jakie odpowiada właściwemu odczytowi pomiarowemu na danym punkcie. Odejmując następnie od wartości H_p odcinek P, odpowiadający odległości miejsca odczytu podziałki od zera podziałki, otrzymamy wartość H_0:

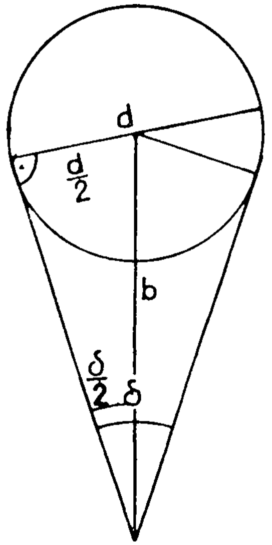
$$H_0 = H_p - P. \tag{92}$$

Zależność tę wyjaśnia rys. 9. Wartość odcinka P przeliczamy z odczytu podziałki za pomocą zależności (91). Długość sprężyny Hp wyznaczamy przez pomiar kąta pionowego między obu jej końcami. Kąt ten pomierzono w dwóch położeniach lunety, dziesięciokrotnie przy każdym położeniu. Średni błąd tak pomierzonego kąta wyniósł $\pm 0{,}24''$. Do obliczenia H_p wykorzystuje się wzór (90). Średni błąd wyznaczenia H_0 wyniósł $\pm 0{,}008$ mm.

Podany sposób wyznaczenia H_0 jest dlatego najdokładniejszy, że uwzględnia warunek zachowania poziomego położenia belki układu pomiarowego. Ponieważ jednak z analizy dokładnościowej (89) wynika, że tak wysoka dokładność wyznaczenia H_0 nie jest konieczna, obliczono maksymalny błąd pomiaru długości H_0 sprężyny przy dowolnym położeniu belki. Ruch belki w płaszczyźnie pionowej jest ograniczony przez urządzenie do tłumienia wahań poziomych. Wyznaczony luz belki w osi sprężyny wyniósł 0,20 mm. Przyjmując, że belka położenie poziome przyjmuje mniej więcej w połowie przedziału wyznaczonego przez luz, przy dowolnym położeniu belki maksymalny błąd pomiaru długości H_0 sprężyny będzie równy $\pm 0{,}1$ mm. Zatem w świetle wymagań wynikających z przeprowadzonej analizy dokładnościowej (89), wielkość H_0 można wyznaczyć bezpośrednio na dowolnym punkcie przez nastawienie podziałki grawimetru na zero i w takim ustawieniu pomierzyć długość sprężyny.



Rys. 9



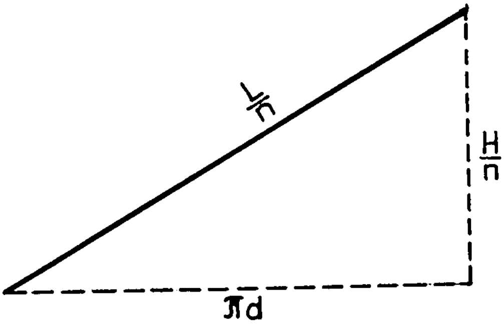
Rys. 10

D ł u g o ś ć d r u t u s p r ę ż y n y *L*. Do wyznaczenia długości drutu sprężyny trzeba — jak już wspomniano — pomierzyć jej średnicę *d*. Średnicę tę wyznaczono przez pomiar kąta poziomego δ pomiędzy stycznymi do zwojów sprężyny, przechodzącymi przez stanowisko teodolitu. Do obliczenia zastosowano wzór (rys. 10):

$$d = 2b \sin \frac{\delta}{2}, \tag{93}$$

gdzie: *b* — odległość osi sprężyny od osi teodolitu. Kąt δ wyznaczono dla każdego zwoju sprężyny z wyjątkiem kilkunastu niewidocznych, zasłanianych elementami konstrukcyjnymi grawimetru. Do dalszych obliczeń przyjęto wartość średnią tego kąta. Taki cykl pomiarów wykonano trzykrotnie dla różnych stanów rozciągnięcia sprężyny tj. dla różnych nastawień podziałki. Średni błąd tak wyznaczonych liczbowych wartości średnio wyniósł od $\pm 0{,}005$ do $\pm 0{,}009$ mm.

Do obliczenia długości drutu sprężyny wyprowadzono wzór, uwzględniający nachylenie zwojów. Na rys. 11 przedstawione jest rozwinięcie



Rys. 11

pobocznicy walca, utworzonego przez sprężynę, w granicach jednego zwoju. Z rysunku tego możemy napisać:

$$\frac{L^2}{n^2} = \frac{H^2}{n^2} + \pi^2 d^2 ,$$

a stąd po przekształceniach otrzymamy wzór na długość drutu sprężyny L:

$$L = \pi d n \sqrt{1 + \frac{H^2}{\pi^2 d^2 n^2}} , \tag{94}$$

gdzie: n — ilość zwojów sprężyny.

Ocenę dokładności wyznaczenia długości L wykonano dwukrotnie: z analizy średnich błędów wielkości występujących we wzorze (94) otrzymano średni błąd $m_L = \pm 1{,}2$ mm, a z odchyłek trzech wyznaczeń L przy różnych rozciągnięciach sprężyny otrzymano $m_L = \pm 2{,}6$ mm.

Pomiar odległości pomiędzy osiami mierzonych elementów a osią pionową teodolitu. Odległości te mierzono dwiema metodami: przez pomiar bezpośredni i paralaktyczny. Do pomiaru bezpośredniego użyto ruletki stalowej z podziałem milimetrowym. Pomiar wykonywano dziesięciokrotnie. Do pomiaru paralaktycznego użyto jako bazy liniału o długości 0,5 m, a kąt paralaktyczny mierzono tym samym teodolitem, którym wykonywano całokształt pomiarów tj. Wildem T3. Kąt paralaktyczny mierzono dziesięciokrotnie. Z analizy różnic wyników otrzymanych obu metodami, średni błąd pomiaru omawianych odległości oceniono na $\pm 0{,}26$ mm.

Ponieważ sprężyna i podziałka grawimetru — dwa elementy podlegające pomiarowi — leżą w różnych miejscach, konieczny był pomiar dwóch odległości, tj. odległości osi każdego z tych elementów od osi teodolitu. W związku z tym, na karton leżący pod grawimetrem na górnej podstawie słupa, na którym ustawiony był ten instrument podczas pomiarów, zrzutowane były osie pionowe sprężyny i podziałki. Wobec tego odstęp tych rzutów można było wyznaczyć z różnicy pomierzonych odległości omawianych elementów od teodolitu oraz z bezpośredniego pomiaru tego odstępu na kartonie. Wielkość odstępu wynosiła około 13 mm. Rozbieżność tych dwóch wyznaczeń wyniosła 0,1 mm co dodatkowo charakteryzuje dokładność pomiaru omawianych odległości.

Całokształt omawianych pomiarów można w zasadzie obliczyć bez bezpośredniego pomiaru odległości sprężyny i podziałki od teodolitu. Traktując podziałkę grawimetru jako łatę bazową do paralaktycznego pomiaru odległości można obliczyć jej odległość od teodolitu a następnie przez pomiar odległości osi podziałki od osi sprężyny — jak to omówiono wyżej — można obliczyć odległość sprężyny od teodolitu. Całość obliczeń prowadzi się od razu w jednostkach działek podziałki (dz). Należy tylko pamiętać o przeliczeniu odległości między osiami podziałki i sprężyny z milimetrów na działki, zgodnie z zależnością: 1 dz = 0,5 mm.

Na podstawie wykonanych pomiarów dla egzemplarza grawimetru nr 112 otrzymano następujące średnie błędy wyznaczenia poszczególnych współczynników wzorów (75) i (76): $m_1 = \pm 6 \cdot 10^{-8}$, $m_2 = +3 \cdot 10^{-10}$ i $m_3 = \pm 1{,}6 \cdot 10^{-14}$. Ostatecznie więc wpływ średniego błędu wyznaczenia funkcji $f(M, \Delta M)$, na wyznaczenie różnicy przyspieszenia siły ciężkości Δg, liczony według wzoru:

$$m_{\Delta g_f} = \sqrt{(2M+\Delta M)^2 m_1^2 + (3M^2+3M\Delta M+\Delta M^2)^2 m_2^2 + \ldots} \tag{95}$$

może dla całego zakresu grawimetru tj. dla $M = 0$ i $\Delta M = 80$ dz osiągnąć wartość maksymalną, równą:

$$m_{\Delta g_{f\,max}} = \pm 0{,}0042 \text{ mgal.} \tag{96}$$

Ponieważ średni błąd najdokładniejszych pomiarów Δg przy użyciu grawimetru Gs-11 wynosi $\pm 0{,}01 - 0{,}02$ mgal, uzyskana wartość średniego błędu (96) wykazuje, że opisany sposób wyznaczenia funkcji $f(M, \Delta M)$ pozostaje praktycznie bez wpływu na dokładność wyznaczania Δg. Spełnione więc zostały postulaty postawione na początku rozważań związanych z wyznaczaniem tej funkcji.

Tablica 5

nr egz.	H_0 mm	d mm	L mm	n
110	55,51	6,10	1746	91
112	54,47	6,53	1642	80

W tablicy 5 umieszczono wykaz wielkości elementów związanych z wyznaczaniem funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$ uzyskane dla dwóch egzemplarzy grawimetrów Askania Gs-11: nr 110 i nr 112. Wykaz ten pozwala się zorientować w rzędzie wielkości elementów oraz w różnicach występujących pomiędzy różnymi egzemplarzami tego typu grawimetrów.

5.2.2. *Tablice pomocnicze do obliczania funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$*

W celu ułatwienia korzystania ze wzorów, zawierających $F(M)$ lub $f(M, \Delta M)$, dla funkcji tych sporządzono tablice, wykorzystując przy obliczeniach elektronową uniwersalną maszynę cyfrową UMC-1. Obliczenia zaprogramowane i wykonane zostały w Instytucie Geodezji i Kartografii przez mgr inż. Witolda Gedymina.

Pierwsze tablice wykonane zostały do obliczania przyspieszenia referencyjnego g_r według wzoru (40):

$$g_r = AMF(M).$$

W tablicach tych podane zostały wartości:

$$[F(M)-1]\cdot 10^7, \tag{97}$$

tzn. stabelowano cyfry od 3-go do 7-go miejsca po przecinku wartości $F(M)$, gdyż w całym obszarze występowania funkcji, w zakresie potrzebnym dla grawimetru, pierwsze trzy cyfry wartości funkcji $F(M)$ są zawsze takie same a mianowicie: 1,00. Wartości (97) podano dla argumentu M w zakresie od -1 do 82 dz w odstępach co 0,05 dz. Wzór jednej strony tych tablic podany jest w tablicy 6.

Drugie tablice wykonane zostały do obliczania różnic przyspieszenia siły ciężkości Δg na podstawie wyników pomiarów grawimetrem, według wzoru (43):

$$\Delta g = A\Delta M f(M, \Delta M).$$

W tablicach tych podane zostały wartości:

$$[f(M, \Delta M)-1]\cdot 10^7, \tag{98}$$

tzn. stabelowano cyfry od 3-go do 7-go miejsca po przecinku wartości $f(M, \Delta M)$ z tych samych powodów co w wypadku poprzednich tablic. Wartości (98) podano dla argumentu M w zakresie od 0 do 80 dz w odstępach co 5 dz oraz dla ΔM od 0 do $(80-M)$ dz w odstępach też co 5 dz. Wzór jednej strony tych tablic podany jest w tablicy 7.

Opisane wyżej tablice (98) zawierają tylko dwie strony i obejmują cały zakres występowania funkcji $f(M, \Delta M)$ w praktyce. Służą one przede wszystkim do obliczeń, omówionych dalej w rozdziale 8. Ze względu

Tablica 6

	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	
40	09570	09583	09597	09611	09625	09639	09653	09666	09680	09694	40
41	09847	09861	09875	09889	09903	09917	09931	09945	09959	09973	41
42	10126	10140	10155	10169	10183	10197	10211	10225	10239	10253	42
43	10408	10422	10436	10450	10464	10478	10493	10507	10521	10535	43
44	10691	10705	10719	10734	10748	10762	10776	10790	10805	10819	44
45	10976	10990	11005	11019	11033	11048	11062	11076	11090	11105	45
46	11263	11277	11292	11306	11320	11335	11349	11364	11378	11393	46
47	11552	11566	11581	11595	11610	11624	11639	11653	11668	11682	47
48	11842	11857	11871	11886	11901	11915	11930	11944	11959	11974	48
49	12135	12150	12164	12179	12194	12208	12223	12238	12252	12267	49
50	12429	12444	12459	12474	12488	12503	12518	12533	12548	12562	50
51	12726	12740	12755	12770	12785	12800	12815	12830	12845	12859	51
52	13024	13039	13054	13069	13084	13099	13114	13129	13143	13158	52
53	13324	13339	13354	13369	13384	13399	13414	13429	13444	13459	53
54	13626	13641	13656	13671	13686	13701	13717	13732	13747	13762	54
55	13929	13945	13960	13975	13990	14006	14021	14036	14051	14067	55
56	14235	14250	14266	14281	14296	14312	14327	14343	14358	14373	56
57	14543	14558	14574	14589	14604	14620	14635	14651	14666	14682	57
58	14852	14868	14883	14899	14914	14930	14945	14961	14976	14992	58
59	15163	15179	15195	15210	15226	15242	15257	15273	15288	15304	59
60	15477	15492	15508	15524	15539	15555	15571	15587	15602	15618	60
	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	

Tablica 7

m 00.0 - 80.0 nr 112 dm 00.0 - 40.0

	00	05	10	15	20	25	30	35	40	
00.0	00000	01034	02115	03243	04417	05638	06906	08221	09583	00.0
05.0	02092	03197	04348	05545	06790	08081	09419	10804	12236	05.0
10.0	04324	05498	06719	07987	09302	10663	12072	13527	15029	10.0
15.0	06696	07941	09232	10570	11955	13386	14865	16390	17963	15.0
20.0	09208	10523	11884	13292	14748	16250	17799	19395	21038	20.0
25.0	11861	13246	14677	16156	17681	19254	20873	22540	24254	25.0
30.0	14654	16109	17611	19160	20756	22399	24089	25826	27610	30.0
35.0	17588	19113	20685	22305	23970	25685	27446	29254	31109	35.0
40.0	20662	22258	23901	25591	27328	29112	30944	32822	34748	40.0
45.0	23877	25544	27257	29018	30826	32681	34583	36533		45.0
50.0	27234	28971	30755	32586	34465	36391	38364			50.0
55.0	30731	32539	34394	36296	38246	40243				55.0
60.0	34370	36249	38175	40148	42169					60.0
65.0	38151	40101	42098	44142						65.0
70.0	42074	44094	46162							70.0
75.0	46139	48230								75.0
80.0	50346									80.0
	00	05	10	15	20	25	30	35	40	

Tablica 8

m 56.0 - 60.0 dm 10.0 - 12.0

	10.0	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0	
56.0	3514	3521	3529	3537	3544	3552	3559	3567	3575	3582	3590	56.0
56.1	3521	3529	3537	3544	3552	3559	3567	3575	3582	3590	3598	56.1
56.2	3529	3536	3544	3552	3559	3567	3574	3582	3590	3597	3605	56.2
56.3	3536	3544	3552	3559	3567	3574	3582	3590	3597	3605	3613	56.3
56.4	3544	3551	3559	3567	3574	3582	3590	3597	3605	3612	3620	56.4
56.5	3551	3559	3567	3574	3582	3589	3597	3605	3612	3620	3628	56.5
56.6	3559	3566	3574	3582	3589	3597	3605	3612	3620	3628	3635	56.6
56.7	3566	3574	3582	3589	3597	3605	3612	3620	3627	3635	3643	56.7
56.8	3574	3582	3589	3597	3604	3612	3620	3627	3635	3643	3650	56.8
56.9	3581	3589	3597	3604	3612	3620	3627	3635	3643	3650	3658	56.9
57.0	3589	3597	3604	3612	3620	3627	3635	3643	3650	3658	3666	57.0
57.1	3596	3604	3612	3619	3627	3635	3642	3650	3658	3665	3673	57.1
57.2	3604	3612	3619	3627	3635	3642	3650	3658	3665	3673	3681	57.2
57.3	3612	3619	3627	3635	3642	3650	3658	3665	3673	3681	3688	57.3
57.4	3619	3627	3634	3642	3650	3657	3665	3673	3681	3688	3696	57.4
57.5	3627	3634	3642	3650	3657	3665	3673	3680	3688	3696	3704	57.5
57.6	3634	3642	3650	3657	3665	3673	3680	3688	3696	3704	3711	57.6
57.7	3642	3649	3657	3665	3673	3680	3688	3696	3703	3711	3719	57.7
57.8	3649	3657	3665	3672	3680	3688	3696	3703	3711	3719	3727	57.8
57.9	3657	3665	3672	3680	3688	3695	3703	3711	3719	3726	3734	57.9
58.0	3665	3672	3680	3688	3695	3703	3711	3719	3726	3734	3742	58.0
58.1	3672	3680	3688	3695	3703	3711	3718	3726	3734	3742	3749	58.1
58.2	3680	3687	3695	3703	3711	3718	3726	3734	3742	3749	3757	58.2
58.3	3687	3695	3703	3710	3718	3726	3734	3741	3749	3757	3765	58.3
58.4	3695	3703	3710	3718	3726	3734	3741	3749	3757	3765	3772	58.4
58.5	3703	3710	3718	3726	3733	3741	3749	3757	3765	3772	3780	58.5
58.6	3710	3718	3726	3733	3741	3749	3757	3764	3772	3780	3788	58.6
58.7	3718	3726	3733	3741	3749	3757	3764	3772	3780	3788	3795	58.7
58.8	3725	3733	3741	3749	3756	3764	3772	3780	3788	3795	3803	58.8
58.9	3733	3741	3749	3756	3764	3772	3780	3787	3795	3803	3811	58.9
59.0	3741	3748	3756	3764	3772	3780	3787	3795	3803	3811	3819	59.0
59.1	3748	3756	3764	3772	3779	3787	3795	3803	3811	3818	3826	59.1
59.2	3756	3764	3772	3779	3787	3795	3803	3810	3818	3826	3834	59.2
59.3	3764	3771	3779	3787	3795	3803	3810	3818	3826	3834	3842	59.3
59.4	3771	3779	3787	3795	3802	3810	3818	3826	3834	3842	3849	59.4
59.5	3779	3787	3795	3802	3810	3818	3826	3834	3841	3849	3857	59.5
59.6	3787	3794	3802	3810	3818	3826	3834	3841	3849	3857	3865	59.6
59.7	3794	3802	3810	3818	3826	3833	3841	3849	3857	3865	3873	59.7
59.8	3802	3810	3818	3825	3833	3841	3849	3857	3865	3872	3880	59.8
59.9	3810	3818	3825	3833	3841	3849	3857	3865	3872	3880	3888	59.9
60.0	3817	3825	3833	3841	3849	3857	3864	3872	3880	3888	3896	60.0
	10.0	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0	

Tablica 9

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
00.0	0000	0004	0008	0012	0016	0020	0024	0028	0033	0037	00.0
01.0	0041	0045	0049	0053	0057	0061	0065	0070	0074	0078	01.0
02.0	0082	0086	0090	0094	0099	0103	0107	0111	0115	0120	02.0
03.0	0124	0128	0132	0137	0141	0145	0149	0153	0158	0162	03.0
04.0	0166	0171	0175	0179	0183	0188	0192	0196	0201	0205	04.0
05.0	0209	0214	0218	0222	0227	0231	0235	0240	0244	0248	05.0
06.0	0253	0257	0261	0266	0270	0275	0279	0284	0288	0292	06.0
07.0	0297	0301	0306	0310	0315	0319	0324	0328	0332	0337	07.0
08.0	0341	0346	0350	0355	0359	0364	0368	0373	0378	0382	08.0
09.0	0387	0391	0396	0400	0405	0409	0414	0419	0423	0428	09.0
10.0	0432	0437	0442	0446	0451	0455	0460	0465	0469	0474	10.0
11.0	0479	0483	0488	0493	0497	0502	0507	0511	0516	0521	11.0
12.0	0526	0530	0535	0540	0545	0549	0554	0559	0564	0568	12.0
13.0	0573	0578	0583	0587	0592	0597	0602	0607	0611	0616	13.0
14.0	0621	0626	0631	0636	0640	0645	0650	0655	0660	0665	14.0
15.0	0670	0674	0679	0684	0689	0694	0699	0704	0709	0714	15.0
16.0	0719	0724	0729	0734	0739	0743	0748	0753	0758	0763	16.0
17.0	0768	0773	0778	0783	0788	0793	0798	0804	0809	0814	17.0
18.0	0819	0824	0829	0834	0839	0844	0849	0854	0859	0864	18.0
19.0	0869	0875	0880	0885	0890	0895	0900	0905	0911	0916	19.0
20.0	0921	0926	0931	0936	0942	0947	0952	0957	0962	0968	20.0
21.0	0973	0978	0983	0988	0994	0999	1004	1009	1015	1020	21.0
22.0	1025	1031	1036	1041	1046	1052	1057	1062	1068	1073	22.0
23.0	1078	1084	1089	1094	1100	1105	1110	1116	1121	1127	23.0
24.0	1132	1137	1143	1148	1153	1159	1164	1170	1175	1181	24.0
25.0	1186	1192	1197	1202	1208	1213	1219	1224	1230	1235	25.0
26.0	1241	1246	1252	1257	1263	1268	1274	1279	1285	1291	26.0
27.0	1296	1302	1307	1313	1318	1324	1330	1335	1341	1346	27.0
28.0	1352	1358	1363	1369	1374	1380	1386	1391	1397	1403	28.0
29.0	1408	1414	1420	1425	1431	1437	1442	1448	1454	1460	29.0
30.0	1465	1471	1477	1483	1488	1494	1500	1506	1511	1517	30.0
31.0	1523	1529	1534	1540	1546	1552	1558	1564	1569	1575	31.0
32.0	1581	1587	1593	1599	1604	1610	1616	1622	1628	1634	32.0
33.0	1640	1646	1651	1657	1663	1669	1675	1681	1687	1693	33.0
34.0	1699	1705	1711	1717	1723	1729	1735	1741	1747	1753	34.0
35.0	1759	1765	1771	1777	1783	1789	1795	1801	1807	1813	35.0
36.0	1819	1825	1831	1837	1843	1849	1856	1862	1868	1874	36.0
37.0	1880	1886	1892	1898	1904	1911	1917	1923	1929	1935	37.0
38.0	1941	1948	1954	1960	1966	1972	1979	1985	1991	1997	38.0
39.0	2003	2010	2016	2022	2028	2035	2041	2047	2054	2060	39.0
40.0	2066	2072	2079	2085	2091	2098	2104	2110	2117	2123	40.0
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	

na duże odstępy tablicowe argumentów, nie nadają się one do realizacji wzoru (43) przy masowych obliczeniach polowych, gdyż wymagałoby to kłopotliwej interpolacji dla dwóch argumentów. Toteż dla umożliwienia realizacji masowych obliczeń według wzoru (43), sporządzono jeszcze dwa warianty tablic funkcji $f(M, \Delta M)$.

W pierwszym wariancie podane zostały wartości:

$$[f(M, \Delta M)-1] \cdot 10^6, \tag{99}$$

a więc podobnie jak w tablicach (98) z tym, że zmieniony został zakres i odstępy argumentów oraz ilość stabelowanych cyfr. Wartości (99) podano mianowicie dla argumentu M w zakresie od 0 do 82 dz w odstępach co 0,1 dz oraz dla ΔM od 0 do 12 dz w odstępach co 0,2 dz. Zatem tablice te pozwalają obliczać Δg, mierzone w obszarze całej podziałki grawimetru w zakresie od 0 do około 120 mgal, tj. w zakresie występującym najczęściej w pomiarach polowych o charakterze masowym. Odstępy argumentów dobrane zostały tak, aby interpolację można było wykonywać w pamięci. Wzór jednej strony tych tablic pokazany jest w tablicy 8.

Wartość funkcji $f(M, \Delta M)$ uzyskuje się z tablic (99) w bardzo prosty sposób. Tablice te mają jednak dość istotną wadę, bo są bardzo obszerne — w opisanej wyżej postaci, zawierają 118 stron. Ponieważ istnieje możliwość stabelowania funkcji $f(M, \Delta M)$ w sposób pośredni na znacznie mniejszej ilości stron, poniżej przedstawiony zostanie drugi wariant konstrukcji tablic, służących do obliczania Δg.

Wprowadzimy pojęcie średniego odczytu podziałki grawimetru $M_{śr}$ dla danego przęsła Δg, które określone będzie wzorem:

$$M_{śr} = M + \frac{1}{2} \Delta M. \tag{100}$$

Drogą elementarnych przekształceń algebraicznych można udowodnić, że:

$$f(M, \Delta M) = f(M_{śr}, 0) + \Delta M^2 \left[\frac{1}{4} (w + v^2) + (2vw + v^3) M_{śr} + \dots\right] \tag{101}$$

Wartość liczbowa wyrażenia:

$$\Delta M^2 (2vw + v^3) M_{śr},$$

może wynieść maksymalnie (dla $M_{śr} = 40$ dz i $\Delta M = 80$ dz) $1 \cdot 10^{-7}$. W świetle wymaganej dokładności funkcji $f(M, \Delta M)$ — por. wzór (78) — wyrażenie to możemy zaniedbać, wobec czego wzór (101) przyjmie postać:

$$f(M, \Delta M) = f(M_{śr}, 0) + \frac{1}{4} (w + v^2) \Delta M^2. \tag{102}$$

Wzór (102) określa drugi wariant konstrukcji tablic wartości funkcji $f(M, \Delta M)$. Tablice takie składają się z tabeli wartości funkcji $f(M_{śr}, 0)$, a więc funkcji jednego argumentu, co pozwala zredukować znacznie jej objętość w stosunku do tablic funkcji $f(M, \Delta M)$ — funkcji dwóch argumentów, oraz tabelki wartości poprawek $\frac{1}{4}(w+v^2)\Delta M^2$ jako funkcji argumentu ΔM.

Drugi wariant konstrukcji tablic do obliczania Δg, określony wzorem (102), zrealizowany został w następujący sposób: w tablicach podstawowych podane zostały wartości:

$$[f(M_{śr}, 0)-1]\cdot 10^6 \tag{103}$$

dla $M_{śr}$ w zakresie od 0 do 82 dz w odstępach co 0,1 dz. Tablice te zawierają tylko dwie strony. Wzór jednej strony zamieszczono w tablicy 9.

Tabelkę wartości poprawek $\frac{1}{4}(w+v^2)\Delta M^2$ obliczono dla ΔM w zakresie od 0 do 82 dz w odstępach co 1 dz. Została ona zamieszczona przykładowo jako tablica 10.

Jak widać, drugi wariant konstrukcji tablic do obliczania wartości funkcji $f(M, \Delta M)$, pozwala na radykalne zmniejszenie objętości, w stosunku do pierwszego wariantu (99). Jednocześnie tablice te pozwalają na obliczanie funkcji $f(M, \Delta M)$ w całym obszarze jej występowania potrzebnym dla grawimetru. Jedynym, jakkolwiek niewielkim mankamentem tych tablic jest konieczność dodatkowego obliczania — realizacji wzoru (100).

Przy obliczaniu omówionych tablic uwzględniono czwarte wyrazy we wzorach (75) i (76), tj. dla $F(M)$ wyrażenie:

$$(w^2+3v^2w-v^4)M^4, \tag{104}$$

które dla $M = 80$ dz osiąga maksymalną wartość, rzędu $3\cdot 10^{-7}$, natomiast dla $f(M, \Delta M)$ wyrażenie:

$$(w^2+3v^2w-v^4)\,(5M^4+10M^3\Delta M+10M^2\Delta M^2+5M\Delta M^3+\Delta M^4), \tag{105}$$

które dla $M = 0$ i $\Delta M = 80$ dz osiąga maksymalną wartość, rzędu $2\cdot 10^{-6}$.

Tablica 10

ΔM	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00 0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0001	0002
10	0002	0003	0003	0004	0005	0005	0006	0007	0008	0008
20	0009	0010	0011	0012	0013	0015	0016	0017	0018	0020
30	0021	0022	0024	0025	0027	0029	0030	0032	0034	0035
40	0037	0039	0041	0043	0045	0047	0049	0051	0054	0056
50	0058	0061	0063	0065	0068	0070	0073	0076	0078	0081
60	0084	0087	0090	0092	0095	0098	0101	0105	0108	0111
70	0114	0117	0121	0124	0128	0131	0135	0138	0142	0145
80	0149	0153	0157							

Dla uproszczenia w wyrażeniach (104) i (105) podano wielkości w i v, których związek z L i H_0 określają wzory (27) i (31).

Przykładowe strony tablic, podane jako tablice 6, 7, 8 i 9, dotyczą egzemplarza grawimetru Gs-11 nr 112 i przedstawione są w takiej postaci, w jakiej otrzymywane są bezpośrednio z dalekopisu wyjściowego maszyny elektronowej UMC-1.

5.2.3. *Wyznaczanie współczynnika A*

W celu umożliwienia obliczania wyników pomiaru grawimetrem Gs-11 według wzorów (40) i (43) należy jeszcze wyznaczyć współczynnik A. Jak to już wspomniano przy omawianiu wzoru (45), współczynnika tego nie można obliczyć analitycznie, lecz wyznacza się go na podstawie pomiarów na bazach grawimetrycznych. Do wyznaczenia współczynnika A zastosujemy podobny sposób jak przy wyznaczaniu współczynnika a, obliczanego osobno — z określonym uprzednio współczynnikiem b.

Podstawowym wzorem do dalszych rozważań będzie wzór (40) przedstawiony w takiej formie, aby obserwowana wartość — odczyt podziałki grawimetru M — była w postaci nieuwikłanej, tj.:

$$M = \frac{g_r}{AF(M)}. \tag{106}$$

Wartość M — ściśle biorąc — nie jest tu przedstawiona w postaci nieuwikłanej gdyż występuje z prawej strony równania (106) w $F(M)$. Jednak — jak to zostanie wykazane poniżej — błąd wywołany przyjęciem do obliczenia $F(M)$ nie wyrównanej wartości M nie ma praktycznego wpływu na proces wyrównania tej wartości. Oznaczając M występujące w prawej stronie wzoru (106) przez M^* otrzymamy:

$$M = \frac{g_r}{AF(M^*)}.$$

Stąd $m_{M_{F(M^*)}}$, tj. wpływ błędu $F(M^*)$, spowodowanego niedokładnością M^*, na wyznaczenie M, będzie równy:

$$m_{M_{F(M^*)}} = \pm \frac{g_r}{A[F(M^*)]^2} m_{F(M^*)_{M^*}} \cong \pm \frac{g_r}{A} m_{F(M^*)_{M^*}}, \tag{107}$$

bo w tym wzorze wystarczy przyjąć $F(M^*) = 1$.

Wpływ średniego błędu odczytu podziałki M^* na okreslenie $F(M^*)$ będzie równy:

$$m_{F(M^*)_{M^*}} = \pm 2\cdot 10^{-5}\, m_{M^*}, \tag{108}$$

bo w przybliżeniu:

$$F(M^*) \cong 1 + 2\cdot 10^{-5} M^*. \tag{109}$$

Wstawiając więc (108) do (107) i znając zależność: $\frac{g_r}{A} \cong 100$, otrzymamy ostatecznie:

$$m_{M_{F(M^*)}} = \pm 2 \cdot 10^{-3} m_{M^*}.$$

Z tego widać, że błąd wartości M wywołany założeniem bezbłędności funkcji $F(M)$, obliczanej dla nie wyrównanych wartości M^*, jest 500 razy mniejszy od średniego błędu obserwacji tej wartości M. Ponieważ zupełnie wystarczające jest prowadzenie obliczeń wyrównawczych z rachunkową dokładnością 100 razy większą niż pomiar, nie jest konieczne ścisłe pod względem teoretycznym wyrównanie obserwowanej wartości M, lecz wystarczy dalsze rozważania prowadzić w oparciu o wzór (106).

Do wyrównania zaobserwowanych wartości podziałki M celem wyznaczenia współczynnika A zastosujemy metodę spostrzeżeń pośredniczących. Zatem ogólna postać równań poprawek będzie następująca:

$$v_i = \frac{\partial M}{\partial g_r} dg_r + \frac{\partial M}{\partial A} dA + M_0 - M_i. \tag{110}$$

Z wzoru (106) otrzymamy:

$$\frac{\partial M}{\partial g_r} = \frac{1}{AF(M)} \quad \text{i} \quad \frac{\partial M}{\partial A} = -\frac{M}{A}. \tag{111}$$

Wstawiając (111) do (110), otrzymamy:

$$v_i = \frac{1}{AF(M_i)} dg_{ri} - \frac{M_i}{A} dA + M_0 - M_i. \tag{112}$$

Dalszy ciąg rozważań prowadzących do uzyskania ostatecznego kształtu równania poprawek, dotyczący obliczania przyspieszenia referencyjnego g_{ri}, wprowadzenia pojęcia punktu wyjściowego i ustalenia ilości poprawek typu dg_r, przeprowadzimy analogicznie jak w punkcie 5.1.1., przy wyprowadzaniu wzorów od (51) do (57). Wobec tego dalszy ciąg postępowania zostanie tylko naszkicowany, bez powtarzania podanych tam uzasadnień.

A więc przyspieszenie referencyjne punktu wyjściowego, liczone według wzoru (40) będzie równe:

$$g_{rpw} = A_0 M_{pw} F(M_{pw}). \tag{113a}$$

Przyspieszenie referencyjne i-tego punktu bazy otrzymujemy z wzoru:

$$g_{ri} = g_{rpw} + \Delta g_{ipw}. \tag{113b}$$

Ponieważ wartości Δg przęseł bazy przyjmujemy za bezbłędne a g_{rpw} obliczamy dla przybliżonej wartości A_0, możemy napisać:

$$dg_{ri} = dg_{rpw} = dg_r + M_{pw} F(M_{pw}) dA. \tag{113c}$$

Wstawiając równanie (113c) do (112), otrzymamy:

$$v_i = \frac{1}{AF(M_i)} dg_r + \left[\frac{M_{pw}F(M_{pw})}{AF(M_i)} - \frac{M_i}{A} \right] dA + M_0 - M_i. \tag{114}$$

Ponieważ niewiadome dg_r i dA w równaniu poprawek są wielkościami małymi, liczonymi z dwoma lub najwyżej trzema cyframi znaczącymi, wielkości $F(M_i)$ i $F(M_{pw})$ możemy przyjąć we wzorze (114) za równe 1. Z uwagi na maksymalne wielkości, jakie może przyjmować funkcja $F(M)$, wzór (109) dla $M^*_{max} = 80$ dz, nie popełnimy przy tym założeniu większego błędu niż $\pm 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ wartości współczynnika przy niewiadomych. Zatem uproszczona postać równania poprawek przyjmie postać:

$$v_i = \frac{1}{A} dg_r + \frac{M_{pw} - M_i}{A} dA + M_0 - M_i. \tag{115}$$

Dla n grup pomiarów cechujących, otrzymamy:

$$v_i = \frac{1}{A} dg_{rn} + \frac{M_{pw} - M_i}{A} dA + M_0 - M_i.$$

Dla uproszczenia rachunków, współczynniki przy niewiadomych typu dg_r sprowadzimy do jedności przez pomnożenie całego równania poprawek przez A. Ostatecznie otrzymamy:

$$Av_i = v_i^* = dg_{rn} + \Delta M_i dA + (M_0 - M_i)A, \tag{116}$$

gdzie: $\Delta M_i = M_{pw} - M_i$.

6. Wyznaczanie zależności współczynników A i a od temperatury termostatu i czasu

Jak wiadomo z publikacji [5], [6], [8] i [9], wartość jednej działki podziałki grawimetru w miligalach tj. pierwsza pochodna przyspieszenia siły ciężkości g względem podziałki M jest zależna od mierzonej wielkości g czyli miejsca odczytu na tej podziałce a także od temperatury termostatu oraz czasu. W dotychczasowych rozważaniach, zarówno w ujęciu firmy Askania jak i w ujęciu autora, opartym na teorii sprężyny śrubowej, uwzględniono tylko pierwszy czynnik, co wynika ze wzoru (14):

$$\frac{\partial g}{\partial M} = a + 2bM,$$

oraz z różniczkowania g względem M we wzorze (40):

$$\frac{\partial g}{\partial M} = AF(M) + AM\frac{\partial F(M)}{\partial M}.$$

Dotychczas podane wzory mogą więc służyć do opracowywania pomiarów wykonanych przy tej samej temperaturze termostatu w jednakowym czasie (praktycznie w okresie kilku miesięcy). Obecnie uwzględnimy zmienność współczynników a i A w zależności od temperatury termostatu i czasu.

6.1. Wyznaczanie zależności współczynnika A od temperatury termostatu i czasu

Z omówienia wzoru (45) w punkcie 4.2. wynika, że współczynnika A nie da się wyznaczyć analitycznie na podstawie tego wzoru, gdyż nie są znane dokładnie wartości poszczególnych czynników, występujących po prawej stronie tego wzoru. Tym bardziej trudno by było wyznaczyć zmienność tych czynników w zależności od temperatury i czasu w celu określenia zależności funkcyjnej współczynnika A od czasu i temperatury. Wobec tego, tę zależność funkcyjną przyjąć trzeba hipotetycznie.

Założymy więc, że współczynnik A dla zakresu termostatu o temperaturze t w czasie T można określić wzorem:

$$A_{tT} = A_p + \Delta t \Delta A_t + \Delta T \Delta A_T, \tag{117}$$

gdzie: A_p — wartość współczynnika A dla temperatury termostatu, przyjętej za początkową (np. dla $t = 25°C$) na początku okresu badania grawimetru, Δt — różnica pomiędzy temperaturami t i początkową, ΔT — różnica pomiędzy czasem T i początkiem okresu badania, ΔA_t i ΔA_T — współczynniki temperaturowy i czasowy, dotyczące zmienności współczynnika A.

W celu wyznaczenia współczynników ΔA_t i ΔA_T w procesie wyrównania zaobserwowanych wartości M metodą spostrzeżeń pośredniczących, równanie (117) wstawimy do (106) i stąd następnie obliczymy odpowiednie pochodne cząstkowe, celem określenia równania poprawek według wzoru:

$$v_i = \frac{\partial M}{\partial g_r} dg_{ri} + \frac{\partial M}{\partial A_0} dA_p + \frac{\partial M}{\partial \Delta A_t} d\Delta A_t + \frac{\partial M}{\partial \Delta A_T} d\Delta A_T + M_0 - M_i. \tag{118}$$

Ponieważ szukane współczynniki są wielkościami małymi, przyjmiemy, że ich wartości przybliżone ΔA_{t0} i ΔA_{T0} są równe zeru, a więc $d\Delta A_t = \Delta A_t$ i $d\Delta A_T = \Delta A_T$. Zatem:

$$v_i = \frac{1}{AF(M_i)} dg_{ri} - \frac{M_i}{A} dA_p - \frac{M_i}{A} \Delta t \Delta A_t - \frac{M_i}{A} \Delta T \Delta A_T + M_0 - M_i. \tag{119}$$

Przyspieszenie referencyjne poszczególnych punktów bazy obliczamy w taki sam sposób, jak to przedstawiono w punkcie 5.2.3., tj. według wzorów (113a) i (113b). W tym wypadku jednak poprawka dg_{ri} punktu o bezbłędnej wartości różnicy przyspieszenia siły ciężkości Δg od punktu wyjściowego, będzie równa:

$$dg_{ri} = dg_{rpw} = dg_r + M_{pw}F(M_{pw})\,[dA_p + \Delta t \Delta A_t + \Delta T \Delta A_T], \quad (120)$$

ponieważ zmieniła się zależność pomiędzy właściwą wartością współczynnika A i jego wartością przybliżoną A_0, przyjętą do obliczeń g_r; zależność tę określa obecnie wzór (117).

Wstawiając równanie (120) do (119) i przyjmując, że $F(M_i) = F(M_{pw}) = 1$, co było uzasadnione przy wyprowadzaniu wzoru (115), otrzymamy:

$$v_i = \frac{1}{A} dg_r + \frac{\Delta M_i}{A} dA_p + \frac{\Delta M_i \Delta t}{A} \Delta A_t + \frac{\Delta M_i \Delta T}{A} \Delta A_T + M_0 - M_i, \quad (121)$$

gdzie: $\Delta M_i = M_{pw} - M_i$.

Równanie poprawek (121) dotyczy jednej grupy pomiarów. Jak wspomniano w punkcie 5.1.1., jako grupę pomiarów przyjmujemy szereg obserwacji, wykonanych w ciągu kilku dni, przy jednym położeniu kulki urządzenia do cechowania i przy tej samej temperaturze termostatu. Jest to szereg pomiarów tak zredukowanych, że można dla niego przyjąć jednakową wartość punktu zerowego przyspieszenia referencyjnego a więc i jedną wartość poprawki typu dg_r.

Oczywiście do wyznaczenia współczynnika temperaturowego i czasowego trzeba wykonać kilka cechowań dla różnych temperatur termostatu i w różnym czasie. Każde cechowanie stanowić będzie osobną grupę pomiarową i dostarczy niewiadomą typu dg_r. O ile ponadto w ramach jednego cechowania dokonujemy pomiarów na więcej niż jednej bazie i przy dwóch położeniach kulki urządzenia do cechowania, to takie postępowanie zwiększy odpowiednio ilość grup pomiarowych i ilość niewiadomych typu dg_r. Ostatecznie więc równanie (121) możemy napisać w postaci:

$$v_i = \frac{1}{A} dg_{rn} + \frac{\Delta M_i}{A} dA_p + \frac{\Delta M_i \Delta t_K}{A} \Delta A_t + \frac{\Delta M_i \Delta T_K}{A} \Delta A_T + M_0 - M_i, \quad (122)$$

przy czym:

$$n = b_1 p_1 + b_2 p_2 + \ldots + b_k p_k, \quad (123)$$

gdzie: k — ilość cechowań, b — ilość baz, na których przeprowadzono pomiary w kolejnym cechowaniu, p — ilość położeń kulki urządzenia cechującego w kolejnym cechowaniu (jedno lub dwa).

Dla uproszczenia obliczeń wyrównawczych, obie strony równania (122) możemy pomnożyć przez A. Ostatecznie otrzymamy:

$$Av_i = v_i^* = dg_{rn} + \Delta M_i dA_p + \Delta M_i \Delta t_k \Delta A_t + \Delta M_i \Delta T_k \Delta A_T + A(M_0 - M_i). \quad (124)$$

6.2. Wyznaczanie zależności współczynnika a od temperatury termostatu i czasu

Nawiązując do przeprowadzonych w poprzednim punkcie 6.1. rozważań, dotyczących współczynnika A, możemy stwierdzić, że konieczność hipotetycznego określenia zmienności współczynnika a jest jeszcze bardziej oczywista, gdyż — jak to wynika z rozważań w punkcie 4.1. i ze wzoru (14) — współczynnik a nie jest funkcją elementów fizycznych.

Założymy zatem analogicznie jak w poprzednim punkcie 6.1. w stosunku do współczynnika A, że współczynnik a dla temperatury termostatu t w czasie T można określić wzorem:

$$a_{tT} = a_p + \Delta t \Delta a_t + \Delta T \Delta a_T. \qquad (125)$$

Pomijając objaśnienia analogicznych oznaczeń jak we wzorze (117), postępujemy dalej podobnie, jak przy wyprowadzaniu wzorów od (118) do (124). Wstawiając równanie (125) do (58) i obliczając następnie odpowiednie pochodne cząstkowe w równaniu poprawek, otrzymamy:

$$v_i = \frac{1}{a} dg_{ri} - \frac{M_i}{a} da_p - \frac{M_i}{a} \Delta t \Delta a_t - \frac{M_i}{a} \Delta T \Delta a_T + M_0 - M_i . \qquad (126)$$

Poprawka dg_{ri} będzie w tym przypadku równa:

$$dg_{ri} = dg_{rpw} = dg_r + M_{pw}(da_p + \Delta t \Delta a_t + \Delta T \Delta a_T). \qquad (127)$$

Wstawiając następnie równanie (127) do (126) przy uwzględnieniu rozważań o ilości niewiadomych typu dg_r oraz mnożąc obie strony równania poprawek przez a, otrzymamy ostatecznie:

$$av_i = v_i^* = dg_{rn} + \Delta M_i da_p + \Delta M_i \Delta t_k \Delta a_t + \Delta M_i \Delta T_k \Delta a_T + a(M_0 - M_i). \qquad (128)$$

Postać wzorów (124) i (128) jest — jak widać — identyczna, tylko we wzorze (124) występuje wartość A, natomiast we wzorze (128) — wartość a. Nie należy wobec tego zapominać o zasadniczej różnicy między tymi wzorami, a mianowicie, że przybliżona wartość odczytu podziałki M_0 w wyrazie wolnym we wzorze (124) liczona jest według równania (101), a we wzorze (128) według równania (58).

6.3. Zagadnienie „służby cechowania"

Ponieważ współczynnik A, względnie a, grawimetru jest zmienny w czasie, konieczne jest powtarzanie co pewien okres cechowania tego samego grawimetru. Ponadto współczynnik ten jest inny dla każdej temperatury termostatu. Ponieważ w zależności od pory roku trzeba przy pomiarach używać różnych temperatur, konieczność wyznaczenia współczynnika A, względnie a, dla poszczególnych temperatur wymaga także wielokrotnego cechowania.

Odpowiedni plan cechowań wieloletnich i ich właściwe opracowanie ma bardzo duże znaczenie, gdyż prócz wszechstronnego zbadania instrumentu prowadzi także do zwiększenia dokładności baz grawimetrycznych, na których te cechowania są prowadzone. Zespół czynności związanych z planowaniem, wykonaniem i opracowaniem wieloletnich pomiarów cechujących, przez analogię do pojęć służb w astronomii geodezyjnej, można nazwać „służbą cechowania".

Dotychczasowe rozważania, związane z wyznaczaniem współczynnika A (lub a) i jego zmienności, dotyczyły przypadku, w którym wartości g wszystkich punktów bazy grawimetrycznej, wykorzystanej do danego cechowania, przyjmuje się za bezbłędne w stosunku do punktu wyjściowego. Najczęściej jednak, szczególnie przy rozpoczynaniu służby cechowania, dysponujemy bazami, na których tylko różnica Δg pomiędzy punktami krańcowymi wyznaczona jest względnie dokładnie i przyjmowana — jako wzorzec — za bezbłędną. Odmiennie natomiast przedstawia się to zagadnienie w stosunku do punktów pośrednich bazy, służących do wyznaczania chodu grawimetru. Różnica Δg pomiędzy nimi i punktem wyjściowym, nie może być w początkowych fazach służby cechowania traktowana jako bezbłędna. W toku wykonywania prac cechujących ilość obserwacji na punktach pośrednich bazy rośnie, co po pewnym czasie stwarza możliwość bardzo dokładnego wyznaczenia różnic Δg pomiędzy tymi punktami i punktem wyjściowym, a następnie przyjmowania tych różnic do dalszych prac za bezbłędne.

Uwzględnienie błędności pośredniego punktu bazy w dotychczasowych rozważaniach jest bardzo proste. W przypadku tym błąd przyspieszenia referencyjnego na takim punkcie nie będzie — jak dotychczas — równy błędowi przyspieszenia referencyjnego punktu wyjściowego (120), (127), lecz będzie równy:

$$dg_{ri} = dg_{rpw} + d\Delta g_j, \tag{129}$$

gdzie: $d\Delta g_j$ — poprawka wartości Δg przęsła pomiędzy j-tym punktem pośrednim i wyjściowym.

Wstawiając równanie (129) do (120), lub do (127), które z kolei wstawiane są do równań poprawek, otrzymamy ostatecznie dla A:

$$v_i^* = dg_{rn} + d\Delta g_j + \Delta M_i dA_p + \Delta M_i \Delta t_k \Delta A_t + \Delta M_i \Delta T_k \Delta A_T + A(M_0 - M_i), \tag{130}$$

oraz dla a:

$$v_i^* = dg_{rn} + d\Delta g_j + \Delta M_i da_p + \Delta M_i \Delta t_k \Delta a_t + \Delta M_i \Delta T_k \Delta a + a(M_0 - M_i). \tag{131}$$

Oczywiście ilość niewiadomych typu $d\Delta g_j$ będzie równa ilości pośrednich punktów bazy, których różnic Δg od punktu wyjściowego nie uznajemy za bezbłędne.

Równania poprawek (130) lub (131) służą do łącznego wyrównania wieloletnich pomiarów cechujących, wykonywanych w różnym czasie, przy różnych temperaturach termostatu, na różnych bazach i przy dwóch położeniach kulki dodatkowego urządzenia do cechowania. W wyniku wyrównania uzyskujemy wartości poprawek wartości g pośrednich punktów bazy względem punktu wyjściowego oraz wartości współczynnika A (lub a) na każdy moment opracowywanego okresu i dla każdej temperatury termostatu.

Obecnie podamy jeszcze wzory do obliczenia ilości równań poprawek oraz ilości równań normalnych, tj. ilości niewiadomych w zależności od ilości materiału obserwacyjnego, wykonanego w ramach służby cechowania i przeznaczonego do łącznego wyrównania podaną wyżej metodą.

Równanie poprawek (130) lub (131) układa się dla średniego odczytu podziałki grawimetru M_i, wykonanego podczas jednego cechowania na jednym punkcie bazy przy jednym położeniu kulki urządzenia do cechowania. Oznaczając ilość równań poprawek przez i, otrzymamy:

$$i = \sum_{x=1}^{k} (2J_{2x}+J_{1x}), \tag{132}$$

gdzie: J_{2x} — ilość punktów bazowych, na których w x-tym cechowaniu przeprowadzono obserwacje w dwóch położeniach kulki, J_{1x} — ilość punktów bazowych, na których w x-tym cechowaniu przeprowadzono obserwacje w jednym położeniu kulki oraz k — ilość cechowań.

Oznaczając ilość niewiadomych przez r, uzyskamy:

$$r = \sum_{x=1}^{k} b_x p_x + j + 3, \tag{133}$$

gdzie: b_x — ilość baz, na których przeprowadzono pomiary w x-tym cechowaniu, p — ilość położeń kulki (dwa lub jedno) w x-tym cechowaniu, j — ilość punktów bazowych, których różnic Δg od punktów wyjściowych nie uznajemy za bezbłędne.

Dla przykładu podamy, że łączne wyrównanie pomiarów cechujących, wykonanych grawimetrem Gs-11 nr 112 przez Instytut Geodezji i Kartografii w latach 1958—63, dostarczyło 183 równań poprawek i 42 niewiadomych.

Wyprowadzone równania błędów (130) i (131) dotyczą pomiarów wykonanych jednym grawimetrem. W wypadku prowadzenia służby cechowania większą ilością egzemplarzy grawimetru Askania Gs-11, w równaniach poprawek doszłaby odpowiednia ilość niewiadomych typu dg_{rn} oraz dA i ΔA. Ilość niewiadomych typu $d\Delta g_j$ pozostałaby taka sama.

W wypadku niejednakowej dokładności poszczególnych pomiarów lub całych cechowań, należy uwzględnić wagi obserwacji, co przy postaci równań poprawek (130) i (131) nie nastręcza żadnych trudności.

Podana metoda wyrównania pomiarów wykonanych w ramach służby cechowania jest zgodna z podstawową zasadą rachunku wyrównawczego, bo metoda najmniejszych kwadratów zastosowana jest w stosunku do błędów wielkości obserwowanych, tj. odczytów podziałki pomiarowej grawimetru na punkcie pomiarowym. Metoda ta jest jednak dość pracochłonna, co nie jest mankamentem tylko w wypadku zastosowania do obliczeń liczącej maszyny elektronowej. Dlatego też rozpatrzymy jeszcze jeden sposób wyrównania pomiarów służby cechowania. Wymaga on mniej pracochłonnych obliczeń, lecz nie jest sposobem zupełnie ścisłym z punktu widzenia rachunku wyrównawczego, gdyż metoda najmniejszych kwadratów będzie tu zastosowana do błędów obliczonych wartości współczynnika A lub a z poszczególnych cechowań zamiast do wartości obserwowanych.

Ponieważ omawiana niżej metoda operuje wartościami współczynnika A lub a obliczonymi z poszczególnych cechowań, idea postępowania w stosunku do zespołu wartości współczynnika A będzie identyczna jak i w stosunku do wartości współczynnika a. Jednak niektóre etapy rozumowania i ostateczne wzory będą zapisane w trochę różny sposób wskutek niejednakowej zależności tych współczynników od wartości odczytu podziałki M. Rozpatrzymy zatem zagadnienie kolejno rozpoczynając od współczynnika A.

Jeśli dla każdego cechowania obliczymy współczynniki A w sposób podany w punkcie 5.2.3., to otrzymamy szereg wartości, które zgodnie z przyjętym założeniem o sposobie zmienności współczynnika A od temperatury termostatu i czasu, powinny spełniać równanie (117). Jeśli wykonane jest więcej niż trzy cechowania, które konieczne są do jednoznacznego wyznaczenia niewiadomych w równaniu (117), to niewiadome te A_p, ΔA_t i ΔA_T możemy wyznaczyć w procesie wyrównania. Stosując metodę spostrzeżeń pośredniczących, otrzymamy następujący wzór na równanie błędów:

$$v_k = dA_p + \Delta t_k \Delta A_t + \Delta T_k \Delta A_T + A_{p0} - A_k, \tag{134}$$

przy założeniu, że przybliżone wartości drugiej i trzeciej niewiadomej: ΔA_{t0} i ΔA_{T0} są równe zeru.

Po wyrównaniu wartości współczynnika A przeliczamy wszystkie obserwacje stosując wyrównane wartości tego współczynnika. Przez to uzyskujemy nowe wartości przyspieszenia siły ciężkości na poszczególnych punktach bazowych. Po uśrednieniu na punktach bazowych tych wartości g, otrzymanych z poszczególnych cechowań, możemy w oparciu o nie ponownie obliczyć wartości współczynnika A dla poszczególnych cechowań, a następnie wyrównać je i ponownie obliczyć wartości g punktów bazy. Takie obliczenia współczynnika A i wartości g metodą kolejnych przybliżeń prowadzimy dotąd, aż różnice wyników przedostatniego i ostatniego przybliżenia nie będą przekraczały dokładności rachunku.

W metodzie tej musimy jeszcze rozpatrzyć przypadek, gdy na bazie mamy odcinek dla którego wartość Δg przyjmujemy za bezbłędną i niezmienną. Warunek ten można wyrazić za pomocą równania, a całość zagadnienia sprowadzi się wtedy do wyrównania metodą spostrzeżeń pośrednich z warunkiem na niewiadome [10].

Jeśli wartość Δg jakiegoś odcinka bazy ma pozostać niezmieniona po wyrównaniu współczynnika A opisanym wyżej sposobem, to średnia ze wszystkich wartości Δg tego odcinka, uzyskanych z poszczególnych cechowań oraz obliczeń wykonanych w oparciu o wartości pomierzone ΔM i wartości współczynnika A z wyrównania, musi być równa tej niezmiennej wartości Δg. Ponieważ różnicę przyspieszenia siły ciężkości liczymy z danych pomiarowych według wzoru (43), więc nasz warunek możemy napisać w następujący sposób:

$$\Delta g = \frac{A_1 \Delta M_1 f(M_1, \Delta M_1) + A_2 \Delta M_2 f(M_2, \Delta M_2) + \ldots + A_k \Delta M_k f(M_k, \Delta M_k)}{k}, \qquad (135)$$

lub:

$$k\Delta g = \sum_{n=1}^{k} A_n \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n). \qquad (136)$$

Wstawiając do wzoru (136):

$$A_n = A_{p0} + dA_p + \Delta t_n \Delta A_t + \Delta T_n \Delta A_T$$

i rozwiązując otrzymane równanie względem dA_p, otrzymamy:

$$dA_p = \frac{k\Delta g}{\sum_1^k M_n f(M_n, \Delta M_n)} - A_{p0} - \frac{\sum_1^k \Delta t_n \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)}{\sum_1^k \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)} \Delta A_t -$$

$$- \frac{\sum_1^k \Delta T_n \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)}{\sum_1^k \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)} \Delta A_T. \qquad (137)$$

Wstawiając następnie warunek (137) do równania poprawek (134), uzyskamy:

$$v_n = \left(\Delta t_n - \frac{\sum\limits_1^k \Delta t_n \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)}{\sum\limits_1^k \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)} \right) \Delta A_t +$$

$$+ \left(\Delta T_n - \frac{\sum\limits_1^k \Delta T_n \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)}{\sum\limits_1^k \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)} \right) \Delta A_T + \frac{k\Delta g}{\sum\limits_1^k \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)} - A_n . \quad (138)$$

Zestawiając równania błędów według wzoru (138) dla wszystkich k wykonanych cechowań, otrzymamy drogą wyrównania niewiadome ΔA_t i ΔA_T. Wstawiając je do równania (137) wyznaczymy niewiadomą dA_p.

Celem wyciągnięcia pewnych dodatkowych wniosków, dotyczących omawianej metody, określimy przybliżoną wersję wzoru (137).

Ponieważ różnice odczytów ΔM_n jakiegokolwiek odcinka bazy, nie różnią się dużo między sobą w poszczególnych cechowaniach (maksymalnie około 1‰), to możemy przyjąć przybliżenia:

$$\sum_1^k \Delta t_n \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n) \cong \Delta M_{śr} f(M_{śr}, \Delta M_{śr}) \sum_1^k \Delta t_n,$$

$$\sum_1^k \Delta T_n \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n) \cong \Delta M_{śr} f(M_{śr}, \Delta M_{śr}) \sum_1^k \Delta T_n , \quad (139)$$

$$\sum_1^k \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n) \cong k \Delta M_{śr} f(M_{śr}, \Delta M_{śr}) .$$

Poza tym, ponieważ:

$$\Delta g = A \Delta M f(M, \Delta M),$$

więc:

$$\frac{k\Delta g}{\sum\limits_1^k \Delta M_n f(M_n, \Delta M_n)} \cong A_{śr} . \quad (140)$$

a zatem w przybliżeniu równanie (137) możemy przedstawić w postaci:

$$dA_p \cong A_{śr} - A_0 - \Delta t_{śr} \Delta A_t - \Delta T_{śr} \Delta A_T . \quad (141)$$

Jak widać ze wzoru (141), uwzględnienie w omawianej metodzie stałości jakiegokolwiek przęsła bazy prowadzi do jednakowych (w przybliżeniu) równań warunkowych, gdyż są one w przybliżeniu niezależne od ΔM tych przęseł. W metodzie tej można więc założyć stałość tylko jednego przęsła bazy grawimetrycznej, gdyż założenie większej liczby niezmiennych przęseł nie prowadzi do uzyskania wyznaczalnego układu równań warunkowych typu (137).

Jak już wspomniano, wyrównanie wartości współczynnika a można przeprowadzić w identyczny sposób.

Stosując pojęcie współczynnika a różnicę przyspieszenia siły ciężkości Δg obliczamy według wzoru (22). Zatem warunek niezmienności jednego przęsła bazy należy zapisać w taki sposób:

$$\Delta g = \frac{a_1 \Delta M_1 + b\Delta M_1 \sum M_1 + a_2 \Delta M_2 + b\Delta M_2 \sum M_2 + \ldots + a_k \Delta M_k + b\Delta M_k \sum M_k}{k}$$

lub:

$$\sum_1^k a_n \Delta M_n = k\Delta g - b \sum_1^k \Delta M_n \sum M_n. \tag{142}$$

Uwzględniając założenie (125), otrzymamy warunek dla da_p:

$$da_p = \frac{k\Delta g - b \sum_1^k \Delta M_n \sum M_n}{\sum_1^k \Delta M_n} - a_{p0} - \frac{\sum_1^k \Delta t_n \Delta M_n}{\sum_1^k \Delta M_n} \Delta a_t - \frac{\sum_1^k \Delta T_n \Delta M_n}{\sum_1^k \Delta M_n} \Delta a_T. \tag{143}$$

Stąd równanie poprawek będzie miało postać:

$$v_n = \left(\Delta t_n - \frac{\sum_1^k \Delta t_n \Delta M_n}{\sum_1^k \Delta M_n} \right) \Delta a_t + \left(\Delta T_n - \frac{\sum_1^k \Delta T_n \Delta M_n}{\sum_1^k \Delta M_n} \right) \Delta a_T +$$

$$+ \frac{k\Delta g - b \sum_1^k \Delta M_n \sum M_n.}{\sum_1^k \Delta M_n} - a_n. \tag{144}$$

Stosując przybliżenia typu (139) dla wartości, występujących we wzorze (143) można łatwo dowieść, że przybliżenie warunku na da_p będzie miało taką samą postać jak dla dA_p (141). Wobec tego możemy tutaj również zastosować warunek niezmienności tylko jednego przęsła bazy.

Na zakończenie przeprowadzonych rozważań należy dodać, że powyższa metoda może być często stosowana, gdyż na ogół w początkowych okresach wyrównywania pomiarów służby cechowania mamy właśnie do dyspozycji tylko jedno przęsło bazy grawimetrycznej o niezmiennej (wzorcowej) wartości różnicy przyspieszenia siły ciężkości Δg. W późniejszych okresach, gdy mamy większą ilość bardzo dokładnych przęseł, do łącznego wyrównywania pomiarów służby cechowania możemy stosować tylko pierwszą metodę, podaną w niniejszym punkcie 6.3. Uwzględnienie niezmienności wartości Δg takiego przęsła w tamtej metodzie następuje przez przyrównanie do zera niewiadomej typu $d\Delta g_j$ dla końcowego punktu j danego przęsła.

7. Wyznaczanie stałej *c*

Wyposażenie grawimetru Askania Gs-11 w dodatkowe urządzenie do cechowania, pozwalające na zmianę momentu obrotowego masy głównej układu pomiarowego, prowadzi do wystąpienia w podstawowym wzorze na Δg (13) wielkości C i c, określonych wzorem (12). Opis konstrukcji urządzenia do cechowania podany został w rozdziale 2.

Wzór (13), podstawowy wzór ogólny do obliczania Δg na podstawie pomiaru grawimetrem Gs-11, uwzględnia wszystkie możliwe sposoby wykonania odczytów różnicy podziałki, odpowiadającej pewnej różnicy Δg. Istnieją trzy takie sposoby, a mianowicie:

1. wykonanie odczytów podziałki na dwóch różnych punktach grawimetrycznych — na każdym punkcie przy innym położeniu kulki;
2. wykonanie odczytów podziałki na dwóch różnych punktach — na każdym punkcie przy tym samym położeniu kulki;
3. wykonanie dwóch odczytów podziałki dla dwóch położeń kulki na jednym punkcie grawimetrycznym.

Sposobu 1. nigdy się nie stosuje, gdyż nie daje on żadnych praktycznych korzyści.

Sposób 2. jest roboczym sposobem pomiaru różnic przyspieszenia siły ciężkości tym grawimetrem. W tym wypadku wielkości C i c są równe zeru, gdyż nie zmieniając położenia kulki nie zmieniamy jej ramienia r, czyli $\Delta r = 0$. Wtedy wzór (13) przyjmuje uproszczoną postać:

$$\Delta g = \frac{1}{R+r}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} k^{(i)}(M)\Delta M^i\right). \tag{145}$$

Szczegółowe wersje wzoru (145) wyprowadzone były w odpowiednich punktach 4.1. i 4.2. niniejszej pracy.

Sposób 3. służy do wyznaczania różnic podziałki grawimetru ΔM dla dwóch położeń kulki przy niezmiennej wartości przyspieszenia — taką różnicę ΔM oznaczamy przez E. Zatem dla sposobu 3:

$$\Delta g = 0. \tag{146}$$

Ponieważ $C \neq 1$ ($C \cong 4 \cdot 10^{-5}$), więc dla spełnienia warunku (146) wystarczy, żeby:

$$\frac{1}{R+r}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} k^{(i)}(M) E^i\right) - gc = 0\,. \tag{147}$$

Wyznaczając szereg wartości E, możemy zastosować — jak to podane zostało w punkcie 5.1.2. — jeden z dokładniejszych sposobów wyznaczenia współczynnika b. Ponadto, jeśli będziemy mieli dość dokładnie wyznaczoną stałą c, pomiary wartości E na dowolnym stanowisku można wykorzystać do doraźnego badania współczynnika a lub A.

Szczegółowa postać wzoru (147) w systemie wzorów firmy Askania, którą uzyskamy z równania (21), będzie następująca:

$$E(a+b\Sigma M_E)-gc = 0, \tag{148}$$

gdzie przez ΣM_E oznaczamy sumę odczytów podziałki, wykonanych dla lewego i prawego położenia kulki na jednym punkcie. Przekształcając wzór (148), otrzymamy.

$$a = \frac{gc}{E} - b\sum M_E. \tag{149}$$

Szczegółowa postać wzoru (147) w systemie wzorów wyprowadzonych w oparciu o teorię sprężyny śrubowej, którą uzyskamy z równania (42), będzie:

$$AEf(M, E)-gc = 0. \tag{150}$$

Przekształcając wzór (150), otrzymamy:

$$A = \frac{gc}{Ef(M,E)}. \tag{151}$$

Wzory (149) i (151) służą do wspomnianego wyżej doraźnego badania współczynników a i A na podstawie pomiaru E, co możemy wykonywać mając daną stałą c.

Z innego przekształcenia wzorów (148) i (150), otrzymamy:

$$c = \frac{E(a+b\sum M_E)}{g}, \tag{152}$$

oraz

$$c = \frac{AEf(M,E)}{g}. \tag{153}$$

Równania te służą do wyznaczania stałej c w obu rozpatrywanych systemach obliczeń. Fizyczny sens stałej c określa wzór (12):

$$c = \frac{\Delta r}{R+r}.$$

Ze wzoru tego wynika, że wielkość ta jest stała i jej sens fizyczny jest niezależny od przyjętego systemu obliczeń. Zatem wartość liczbowa tej stałej, obliczona na podstawie dużej ilości obserwacji, powinna być w granicach dokładności obliczeń taka sama, niezależnie od tego, czy jest liczona według wzoru (152) czy (153). Obliczenia potwierdzają ten wniosek.

Na podstawie około 500 obserwacji wielkości E wykonanych w Instytucie Geodezji i Kartografii w latach 1961—63 w ramach pięciu cechowań, otrzymano następujące wartości stałej c dla egzemplarza grawimetru Gs-11 nr 112, liczonej według wzorów (152) i (153):

$$c_{(152)} = (42{,}294 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-6}$$

oraz (154)

$$c_{(153)} = (42{,}289 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-6}.$$

Z powodu praktycznej nieprzydatności wspomnianego na początku tego rozdziału pierwszego sposobu pomiaru grawimetrem Gs-11, znajomość stałej C nie jest w zasadzie potrzebna. Jednak dla pełnego wyczerpania zagadnienia wykażemy, że wartość stałej C jest praktycznie równa wartości stałej c. Na podstawie wzorów (12) bardzo łatwo można wyprowadzić zależność:

$$\frac{c-C}{C} = c \cong 4 \cdot 10^{-5}. \tag{155}$$

Wartość (155) można uważać za błąd względny stałej C przy przyjęciu, że $C = c$. Jest on więc przeszło dwa razy mniejszy od względnego błędu średniego wyznaczenia stałej c, który — jak to wynika z równań (154) — jest równy $\pm 1 \cdot 10^{-4}$.

Ponieważ wartość E dla grawimetru Gs-11 jest równa około 4,5 działek, to obliczanie współczynników a i A na podstawie pomiaru E przy znanej wartości stałej c, odpowiadałoby pomiarowi cechującemu na fikcyjnej bazie, której różnica przyspieszenia siły ciężkości między końcowymi punktami wynosiłaby około 42 mgal.

Jak wspomniano wyżej, wartość c jest stała i nie ulega żadnej zmianie nawet z upływem czasu, w przeciwieństwie np. do współczynnika a lub A. Zatem coroczne cechowanie grawimetru, jakie stosuje się zazwyczaj przy posługiwaniu się grawimetrem Gs-11, pozwala na coraz dokładniejsze wyznaczanie wartości stałej c.

8. Określenie zależności między dwoma wzorami szczegółowymi na Δg, wyprowadzonymi w oparciu o dwie rozpatrywane teorie

W poprzednich rozdziałach wszystkie rozważania, dotyczące sposobu wykorzystania danych pomiarowych dostarczanych przez grawimetr Gs-11, prowadzone były równolegle w dwóch kierunkach, wytyczonych przez założenie firmy Askania i teorię sprężyny śrubowej. Obecnie spróbujemy wyznaczyć wzajemne zależności pomiędzy otrzymanymi wzorami na określenie tych samych zjawisk przy różnych założeniach, celem ustalenia wniosków dotyczących przydatności i warunków zastosowania poszczególnych wzorów.

Różnicę $\delta\Delta g$ pomiędzy wartością $\Delta g_{(22)}$, uzyskaną z pewnych danych pomiarowych według wzoru (22) (Askania) a wartością $\Delta g_{(43)}$, uzyskaną z tych samych danych według wzoru (43) (teoria sprężyny), określa wzór:

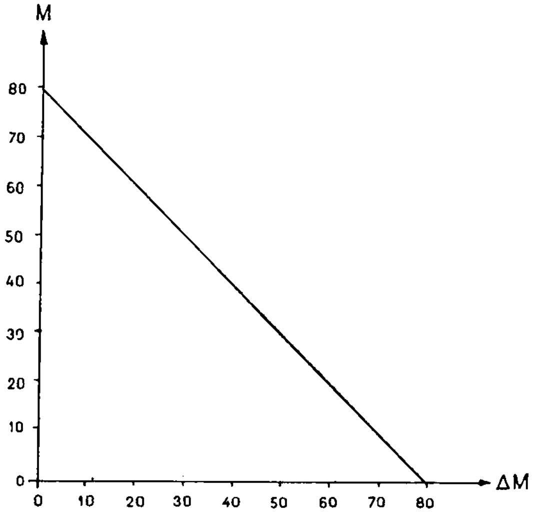
$$\delta\Delta g = \Delta g_{(22)} - \Delta g_{(43)} = \Delta M\,[a + b\,(2M + \Delta M)] - A\Delta M f(M, \Delta M). \qquad (156)$$

Ogólnie biorąc, możemy powiedzieć, że różnica przyspieszenia siły ciężkości pomiędzy dwoma punktami, między którymi wykonano pomiar grawimetrem Gs-11, jest funkcją odczytu podziałki M tego grawimetru na jednym z tych punktów oraz różnicy odczytów podziałki ΔM pomiędzy tymi dwoma punktami. Możemy to zapisać następująco:

$$\Delta g = G(M, \Delta M). \qquad (157)$$

Funkcję Δg możemy sobie zatem wyobrazić jako pewną powierzchnię w przestrzennym układzie współrzędnych prostokątnych M, ΔM i Δg.

Podziałka każdego egzemplarza grawimetru Gs-11 zawiera 80 działek. Zatem zakres występowania M będzie od 0 do 80 dz, a zakres występowania ΔM od 0 do $80 - M$ dz. Stąd rzutem powierzchni określonej wzorem (157) w obszarze jej występowania, na płaszczyznę $M, \Delta M$ będzie trójkąt, przedstawiony na rys. 12.



Rys. 12

Analogiczne wnioski będziemy mogli uzyskać dla wzoru (156) tzn., że wzór ten określa powierzchnię w układzie współrzędnych $M, \Delta M, \delta\Delta g$ a rzutem tej powierzchni w obszarze jej występowania, na płaszczyznę $M, \Delta M$ będzie także trójkąt, przedstawiony na rys. 12. Zatem wszystkie możliwe wartości $\delta\Delta g$ będziemy mogli graficznie przedstawić w formie warstwic, tak jak to jest stosowane dalej na rysunkach od 14 do 17.

Obecnie zajmiemy się określeniem związków pomiędzy funkcją $f(M, \Delta M)$ i współczynnikiem A z jednej strony oraz współczynnikami a i b z drugiej, których uwzględnienie prowadziłoby do uzyskania minimalnej rozbieżności obliczania Δg na podstawie dwóch rozpatrywanych wzorów (22) i (43). Wyznaczenie tych rozbieżności pozwoli na postawienie wniosków, dotyczących warunków zastosowania i przydatności praktycznej poszczególnych wzorów.

Wspomnianą wyżej zależność wyznaczymy przez przyjęcie założenia, aby suma kwadratów wszystkich wartości $\delta\Delta g$ (156) w obszarze ich występowania osiągała wartość minimalną. Przyjmując oznaczenie:

$$a = A + da, \tag{158}$$

z przekształcenia wzoru (156), otrzymamy:

$$\delta\Delta g = \Delta M da + (2M\Delta M + \Delta M^2)b + A\Delta M\,[1 - f(M, \Delta M)]. \tag{159}$$

Możemy następnie przyjąć, że wzór (22) na Δg jest pewnym przybliżeniem wzoru (43), w którym Δg określone jest w sposób ścisły. Zatem równanie (159) będzie równaniem poprawek wartości Δg obliczonych według wzoru (22), względem wartości Δg obliczonych według wzoru (43). Wobec tego, jeśli dla pewnej ilości punktów płaszczyzny $M, \Delta M$, rozmieszczonych równomiernie w obszarze występowania funkcji $\delta\Delta g$, ułożymy równania poprawek typu (159), to przez wyznaczenie z nich dwóch równań normalnych będziemy mogli na podstawie tych ostatnich obliczyć takie wartości da i b, dla których suma kwadratów wartości $\delta\Delta g$ w obszarze ich występowania osiąga minimum.

Pozostaje jeszcze do zbadania, jaki wpływ na wartości da i b obliczone tą drogą, ma ilość równań poprawek, przyjęta do obliczeń, aby — ze względów praktycznych — ustalić konieczne minimum ilości równań poprawek dla uzyskania jednoznacznych wyników.

Tablica 11

Lp. wariantu	n	da mgal/dz	b mgal/dz^2
1	4	−0,00290	0,00028851
2	10	296	28852
3	16	309	28852
4	36	311	28852
5	64	320	28852
6	136	320	28852

W tablicy 11 podano wyniki obliczeń wartości da i b, wykonanych w kilku wariantach różniących się ilością n wyjściowych równań poprawek. Na rys. 13 pokazano — dla poszczególnych n — sposób rozmieszczenia przyjętych do obliczeń wartości $\delta\Delta g$ w obszarze ich występowania. Obliczenia dotyczą egzemplarza grawimetru Gs-11 nr 112.

Jak podano w punkcie 5.1.2. (65), (66), wpływ błędu współczynnika b na obliczenie Δg określony jest wzorem: $m\Delta g_b = \Delta M\Sigma M m_b$. Stąd dla zachowania dokładności rachunku Δg postulowanej w punkcie 5.2.1. przy omawianiu dokładności funkcji $f(M, \Delta M)$, tj. równej 0,005 mgal, średni błąd współczynnika b powinien spełniać nierówność:

$$|m_b| < |m_{bmax}| = \frac{m_{\Delta g_b}}{(\Delta M \sum M)_{max}} = \frac{0{,}005}{6400} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{mgal/dz^2}. \quad (160)$$

Z zależności (160) wynika, że współczynnik b został wyznaczony wystarczająco dokładnie już w wariancie 1.

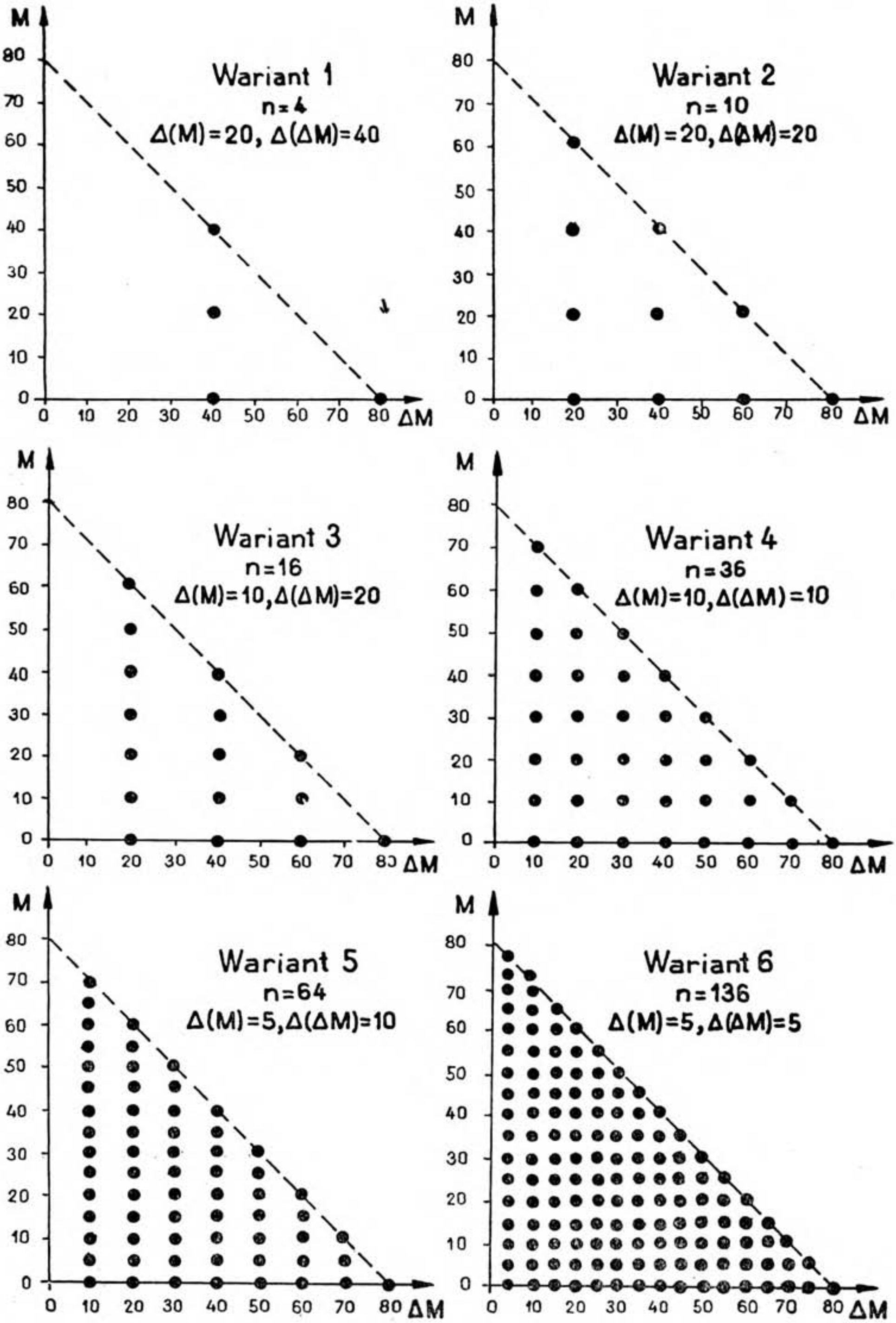
Wpływ błędu współczynnika a na obliczenie Δg określony jest wzorem: $m_{\Delta g_a} = \Delta M m_a$ — (65), (66). Stąd dla zachowania wyżej wspomnianej dokładności otrzymamy następujący warunek dla średniego błędu współczynnika a:

$$|m_a| < |m_{amax}| = \frac{m_{\Delta g_a}}{\Delta M_{max}} = \frac{0{,}005}{80} = 0{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mgal/dz}. \quad (161)$$

Z tego warunku wynika, że do odpowiednio dokładnego wyznaczenia wartości da należałoby stosować wariant 5. Jednak współczynnik a w omawianej metodzie obliczamy ze wzoru (158), a średni błąd współczynnika A, uzyskany z najdokładniejszych jego wyznaczeń na podstawie wieloletnich pomiarów cechujących, wynosi $\pm 7 \cdot 10^{-4}$ mgal/dz. Wobec tego do wyznaczenia da z wystarczającą dokładnością wystarczy już wariant 1.

Obliczenie współczynników a i b omawianą metodą wymaga znajomości współczynnika A, co wynika ze wzoru (159). Ponieważ współczynnik ten jest zmienny, należy się spodziewać, że zmienne będą również wartości da i b, obliczone w oparciu o różne wartości współczynnika A. Tak jest istotnie. Zmienność da i b jest jednak mniejsza niż ich wymagana dokładność, określona warunkami (160) i (161).

Wielkości podane w tablicy 11 liczone były w oparciu o wartość współczynnika $A = 9{,}17185$ mgal/dz, która została określona na styczeń 1963 dla temperatury termostatu 35°C. W oparciu o wartość współczynnika $A = 9{,}16032$ mgal/dz, określoną na styczeń 1959 dla temperatury termostatu 25°C, obliczone zostały wielkości da i b, których numeryczne wartości wyniosły: $da = -0{,}00296$ mgal/dz oraz $b = 0{,}00028816$ mgal/dz. Obliczenia przeprowadzono według wariantu 2. Z zestawienia powyższych wy-

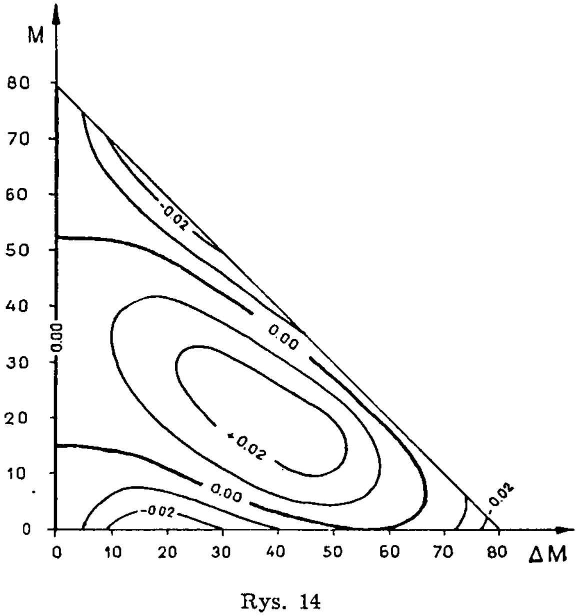

Wariant 1
n=4
Δ(M)=20, Δ(ΔM)=40
Wariant 2
n=10
Δ(M)=20, Δ(ΔM)=20
Wariant 3
n=16
Δ(M)=10, Δ(ΔM)=20
Wariant 4
n=36
Δ(M)=10, Δ(ΔM)=10
Wariant 5
n=64
Δ(M)=5, Δ(ΔM)=10
Wariant 6
n=136
Δ(M)=5, Δ(ΔM)=5
M
ΔM
0 10 20 30 40 50 60 70 80

Rys. 13

ników z obliczeniami zamieszczonymi w tablicy 11 wynika, że współczynnik b i różnicę da pomiędzy współczynnikami A i a danego egzemplarza grawimetru Gs-11 można przez szereg lat dla różnych zakresów termostatu uważać za stałe. Wynika z tego także fakt istnienia jednakowej zmienności współczynników a i A.

Dla uzupełnienia charakterystyki podanej metody obliczania najprawdopodobniejszych wartości współczynników a i b trzeba poruszyć jeszcze dwa zagadnienia.

Podane na rys. 13 przykłady rozmieszczenia punktów na płaszczyźnie $M, \Delta M$, dla których układamy równania poprawek (159) wskazują, że w zasadzie punkty te nie są rozmieszczone równomiernie w obszarze występowania funkcji $\delta\Delta g$, gdyż nie obejmują prostej $\Delta M = 0$. Dzieje się tak dlatego, że dla $\Delta M = 0$ wartość $\delta\Delta g$ jest zawsze równa zero dla każdej wartości a i b, przez co ułożenie równań poprawek dla punktów leżących na osi $\Delta M = 0$ prowadzi do uzyskania równań nieoznaczonych, nie mających żadnego wpływu na wynik obliczeń.



Rys. 14

Potraktowanie równań (159) jako równań poprawek i przejście od nich do równań normalnych celem obliczenia niewiadomych da i b ma charakter czysto formalnego wykorzystania techniki rachunku wyrównawczego do osiągnięcia postawionego celu: wyznaczenia takich wartości da i b, dla których suma kwadratów pewnej ilości wartości $\delta\Delta g$ osiąga minimum. Podstawową przyczyną różniącą omawiane rozwiązanie od zwykłego zagadnienia wyrównawczego jest to, że różnice $\delta\Delta g$ nie są błędami przypadkowymi lecz systematycznymi błędami wartości $\Delta g_{(22)}$ względem wartości $\Delta g_{(43)}$. Stąd też do oceny dokładności nie można wykorzystać np.: dających się obliczyć przy rozwiązywaniu układu równań normalnych takich wartości jak błąd średni pojedynczego spostrzeżenia czy średnie błędy niewiadomych, gdyż wartości te odpowiadają swoim definicjom tylko w tym wypadku, jeśli obliczone są z układów równań błędów o charakterze przypadkowym.

Dodatkowym wynikiem obliczeń współczynników a i b opisaną metodą, pozwalającym na zorientowanie się w rozbieżnościach wyników wyznaczeń Δg w zależności od stosowanego wzoru — (22) lub (43) — jest wykres błędów systematycznych $\delta\Delta g$ dla poszczególnych wartości M i ΔM. Taki wykres dla egzemplarza grawimetru Gs-11 nr 112 pokazany jest na rys. 14, gdzie wartości $\delta\Delta g$ podano w miligalach. Z rysunku tego wynika, że opisaną wyżej metodą można dobrać takie współczynniki a i b, dla których rozbieżności pomiędzy różnicami przyspieszeń siły ciężkości Δg uzyskanymi ze wzorów, wynikających z założeń firmy Askania i wzorów, wynikających z teorii sprężyny śrubowej nie będą przekraczały trzykrotnej wartości średniego błędu pomiaru tym grawimetrem, podawaną przez producenta [2] jako równą $\pm 0{,}01$ mgal. Dalsze wnioski wynikające z powyższego faktu, omówione zostaną w następnym rozdziale.

9. Wnioski

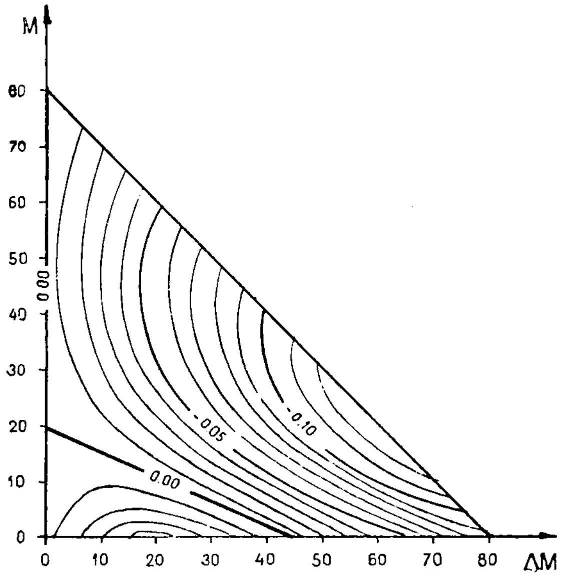
W niniejszej pracy podano szczegółowe opracowanie szeregu sposobów cechowania grawimetrów typu Askania Gs-11, opartych o różne założenia. Część tych sposobów może nie znaleźć praktycznego zastosowania lecz ich opracowanie było potrzebne do przeprowadzenia analizy dla ustalenia sposobu najdokładniejszego i najekonomiczniejszego. W niniejszym paragrafie, na tle opisu przeprowadzonych badań obliczeniowych, przedstawione zostaną wnioski dotyczące najwłaściwszego sposobu postępowania przy cechowaniu grawimetru typu Askania Gs-11.

Jak wynika z rys. 14, istnieje taki zespół wartości $f(M, \Delta M)$, A, a i b, które w granicach trzykrotnej wielkości średniego błędu pomiaru zapewniają istnienie zgodności pomiędzy różnicami Δg, obliczanymi na podstawie dwóch różnych wzorów, tj. (22) i (43), Mogło by się więc wydawać, iż jest zupełnie obojętne, czy przy cechowaniu grawimetru stosujemy wzory oparte o założenie firmy Askania, czy też wzory oparte o teorię sprężyny śrubowej, co stwarzałoby następnie wątpliwość, czy opracowanie tych ostatnich wzorów było konieczne. Tak jednak nie jest. Wynika to z dwóch powodów:

1. znalezienie takich wartości współczynników a i b, które dawałyby wyniki zgodne z teorią sprężyny śrubowej dają się wyznaczyć metodą podaną w rozdziale 8 tylko w wypadku znajomości funkcji $f(M, \Delta M)$ oraz współczynnika A, a więc poprzez znajomość teorii sprężyny i cechowanie według niej;

2. wyznaczenie współczynników a i b niezależnie od teorii sprężyny śrubowej prowadzi do uzyskania większych rozbieżności między obliczeniami według obu metod, co omówione zostanie poniżej.

Obecnie rozpatrzymy jaką uzyskamy zgodność pomiędzy wartościami Δg, liczonymi według wzorów (22) i (43) dla zespołu wartości $f(M, \Delta M)$, A, a i b, z których wartości współczynników a i b obliczone zostały niezależnie z pomiarów cechujących przy wykorzystaniu wyłącznie wzorów, wynikających z oparcia się o założenie firmy Askania i wyprowadzonych w punkcie 5.1.2. niniejszej pracy.



Rys. 15

Zadanie takie zostało przeprowadzone. W tym celu współczynnik b obliczono na podstawie pięciu cechowań grawimetru Gs-11 nr 112 w oparciu o dwie bazy grawimetryczne, metodą podaną w punkcie 5.1.2. [8]. Współczynnik a i jego zmienność wyznaczono z 11 cechowań, wykonywanych w ramach służby cechowania Instytutu Geodezji i Kartografii w latach 1958—63, przy wykorzystaniu metody podanej w punkcie 6.3. Wykres rozbieżności $\delta\Delta g$ w miligalach dla tych wartości a i b przedstawiony jest na rys. 15.

W tablicy 12 podano wyniki badanej rozbieżności jeszcze w inny sposób. Mianowicie w obszarze istnienia funkcji $\delta\Delta g$ wyrażono w procentach stosunek: powierzchni występowania poszczególnych zakresów wielkości omawianej rozbieżności ($|\delta\Delta g|$) do całej powierzchni obszaru istnienia funkcji $\delta\Delta g$.

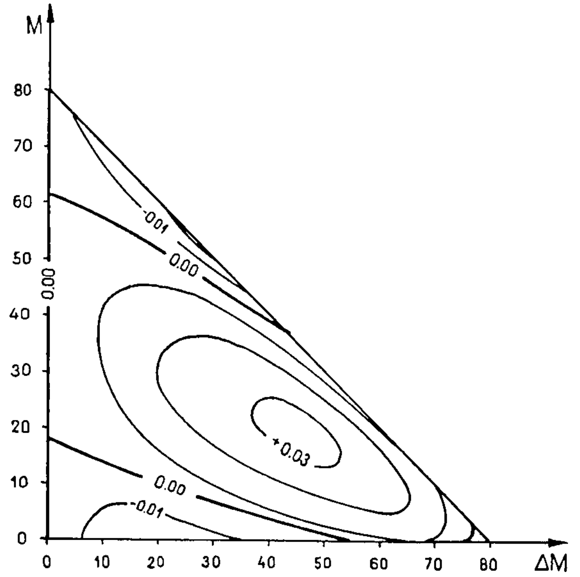
Tablica 12

$\lvert\delta\Delta g\rvert$ mgal	obszar występowania %
0—0,03	43
$>$ 0,03	57
$>$ 0,05	42
$>$ 0,10	12

Na podstawie porównania rys. 14 z rys. 15 i tablicą 12 widać, że stosowanie współczynników a i b wyznaczonych z obliczeń, opartych o wzory wynikające z założenia firmy Askania, prowadzą do znacznego wzrostu rozbieżności z wynikami, opartymi o teorię sprężyny śrubowej. Zjawisko to można wytłumaczyć tym, że wartości liczone w oparciu o założenie firmy Askania, obarczone są przypadkowym błędem obserwacji oraz błędem systematycznym, który wynika z uwzględnienia przez firmę Askania teorii sprężyny śrubowej jedynie w sposób przybliżony. W toku operacji wyrównawczych nad tak obliczonymi wartościami, suma błędu przypadkowego i systematycznego traktowana jest jak błąd przypadkowy danej wartości, co prowadzi do pewnego zniekształcenia ostatecznych wyników.

Wyniki liczbowe podane na rysunkach 14 i 15 oraz w tablicy 12 dotyczyły egzemplarza grawimetru Gs-11 nr 112, który cechowany był przez szereg lat. Z tego powodu jego współczynniki, wyznaczone w oparciu o założenia przybliżone, są więc już dość bliskie wartości ścisłych. Można się natomiast spodziewać, że wyniki pojedynczego cechowania jakiegoś grawimetru w oparciu o założenie przybliżone, będą prowadziły do znacznych rozbieżności, z wynikami uzyskanymi w oparciu o ścisłą teorię. Tak też jest w istocie, co pokazać można na przykładzie cechowania egzemplarza nr 110.

Grawimetr Gs-11 nr 110 cechowany był jeden raz na dwóch bazach grawimetrycznych. Wykres $\delta\Delta g$ dla tego egzemplarza sporządzony dla wartości współczynników a i b ($a = 9{,}00745$ mgal/dz, $b = 0{,}0002534$ mgal/dz^2), które zostały wyznaczone w oparciu o $f(M, \Delta M)$ i A ($A = 9{,}00998$ mgal/dz) metodą opisaną w rozdziale 8, przedstawiony jest na rys. 16. Jak widać, jest on niemal identyczny z wykresem, wykonanym przy takich samych założeniach dla grawimetru nr 112 i zamieszczonym jako rys. 14. Natomiast na rys. 17 i w tablicy 13 przedstawione są wyniki uzyskane dla egzemplarza nr 110 przy uwzględnieniu tych samych założeń jak dla



Rys. 16

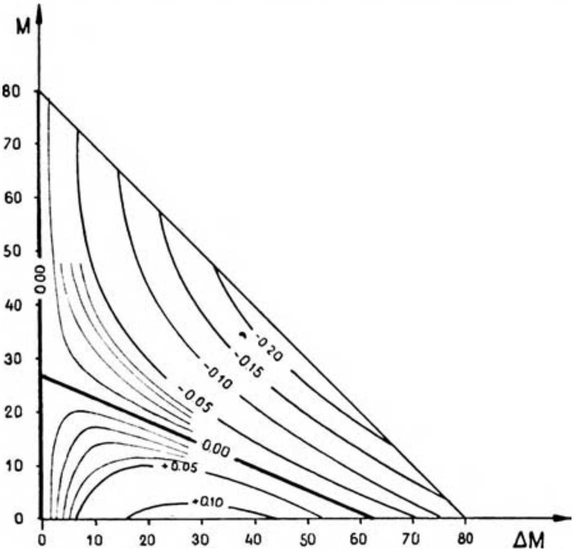
egzemplarza nr 112 do rys. 15 i tablicy 12, ale uzyskane na podstawie tylko jednego, wspomnianego cechowania ($a = 9{,}00064$ mgal/dz, $b =$ $= 0{,}0003978$ mgal/dz^2).

Tablica 13

$\vert\delta\Delta g\vert$ mgal	obszar występowania %
0—0,03	29
> 0,03	71
> 0,05	56
> 0,10	31
> 0,15	15
> 0,20	4

Jak widać, błąd systematyczny $\delta\Delta g$ przekracza tu już wartość 0,2 mgal, co w przypadku pomiarów grawimetrem tej klasy należałoby już traktować jako błąd gruby.

Rozbieżności wyników obliczeń wartości Δg, wykonanych obydwiema metodami, pokazane na rysunkach 15 i 17 należy tłumaczyć jeszcze jedną przyczyną. Wyznaczenie współczynników a i b oraz A odbywa się bowiem na konkretnych bazach grawimetrycznych, które swym zasięgiem wartości g i Δg nie obejmują z reguły całego obszaru występowania funkcji $\Delta g = G(M, \Delta M)$. Analizowane w niniejszej pracy pomiary wykonane zostały na dwóch polskich bazach grawimetrycznych Kuźnice — Kraków



Rys. 17

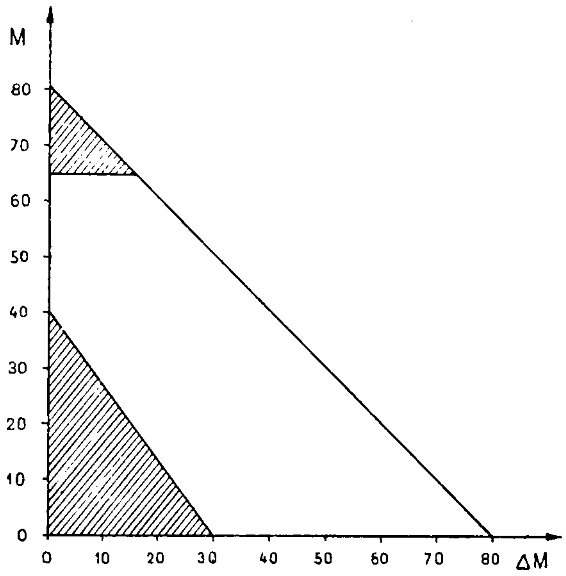
i Dylewska Góra — Frombork, przewidzianych do pomiaru przy użyciu transportu samochodowego, które swym zasięgiem obejmują część obszaru występowania funkcji $\Delta g = G(M, \Delta M)$, pokazaną na rys. 18.

Porównując rozbieżności obliczeń Δg obydwiema metodami w zasięgu polskich baz grawimetrycznych, podane na rysunkach 15 i 17, a więc dla a i b wyznaczonych na bazie, stwierdzimy, że rozbieżności te mieszczą się w granicach trzykrotnego błędu pomiaru, równego dla egzemplarza nr 112 $\pm 0{,}01$ mgal, a dla egzemplarza nr 110 $\pm 0{,}03$ mgal.

Rozbieżności w obliczeniu Δg, podane na rysunkach 15 i 17 w obszarze leżącym poza zasięgiem polskich baz grawimetrycznych, spowodowane są więc ekstrapolacją ważności współczynników a i b na ten obszar.

Reasumując powyższe rozważania możemy powiedzieć, iż do uzyskania wystarczająco dokładnych wyników obliczenia wartości Δg w części obszaru występowania funkcji $\Delta g = G(M, \Delta M)$, pokrywającym się z zasięgiem baz grawimetrycznych, obojętny jest w zasadzie sposób cechowania. Jeśli jednak chcemy uzyskać jednoznaczne wyniki obliczeń Δg obu metodami dla całego zakresu grawimetru, to możemy to uzyskać wyłącznie poprzez cechowanie według metody opartej o teorię sprężyny śrubowej i obliczenie współczynników a i b we wzorze firmy Askania sposobem, podanym w rozdziale 8 niniejszej pracy.

Gdybyśmy dysponowali bazą grawimetryczną, pokrywającą się całkowicie z możliwościami pomiarowymi grawimetru, można by oczywiście



Rys. 18

oczekiwać uzyskania podobnej zgodności wyników obliczeń Δg obydwiema metodami, jak zgodność podana na rysunkach 14 i 16. W praktyce stworzenie takiej bazy, dogodnej do pomiaru nie zawsze jest jednak możliwe.

Kryterium przydatności dwóch zasadniczych metod cechowania omawianych w niniejszej pracy, może być jeszcze ocena wewnętrznej zgodności wyników pomiarów, uzyskanych z przeliczenia zaobserwowanych wartości według wzorów, reprezentujących poszczególne metody. Ocenę taką przeprowadzono na materiale obserwacyjnym, uzyskanym w ramach służby cechowania, prowadzonej w Instytucie Geodezji i Kartografii w latach 1958—63 przy użyciu egzemplarza grawimetru Gs-11 nr 112.

Materiał obserwacyjny służby cechowania opracowano metodą podaną w punkcie 6.3. niniejszej pracy, w dwóch wariantach. W wariancie pierwszym, obserwacje wyrównano celem wyznaczenia poprawek wartości g punktów pośrednich baz względem punktów wyjściowych, oraz wszelkie dane, dotyczące współczynnika A, tj. jego wartość początkową na moment rozpoczęcia służby oraz współczynniki jego zmienności od temperatury termostatu i czasu. W wariancie drugim celem wyrównania obserwacji było także wyznaczenie poprawek wartości g punktów pośrednich baz, natomiast z danych instrumentalnych — wyznaczenie wszelkich danych, dotyczących współczynnika a. Oczywiste jest więc, że w wariancie pierwszym wykorzystywane były wzory, wyprowadzone w oparciu o teorię sprężyny śrubowej oraz znajomość funkcji $F(M)$, natomiast w wariancie drugim wykorzystywane były wzory, wyprowadzone w oparciu o założenie firmy Askania oraz znajomość współczynnika b, wyznaczonego z pięciu cechowań metodą, podaną w punkcie 5.1.2. [8].

Jedyną różnicą pomiędzy dwoma wymienionymi wariantami wyrównania obserwacji służby cechowania było zastosowanie różnych wzorów. Natomiast identyczne były pozostałe założenia wyrównania, jak: przyjęcie jednego odcinka bazy (Kraków — Zakopane) za niezmienny i równy 255,029 mgal, przyjęcie obserwacji za równodokładne oraz ustalenie sposobu obliczania średniej różnicy odczytów podziałki grawimetru dla danego przęsła bazy w danym cechowaniu.

Podane wyżej uwagi skłaniają do postawienia tezy, że różna zgodność wewnętrzna obliczonych wyników pomiarów w obrębie poszczególnych wariantów obliczeń, spowodowana będzie różną zdolnością prawidłowej interpretacji związków zachodzących pomiędzy obserwacjami, przez dwie rozpatrywane teorie. Miernikiem wewnętrznej zgodności obserwacji może być oczywiście średni błąd m_0 pojedynczego spostrzeżenia, otrzymany z wyrównań w poszczególnych wariantach.

Średni błąd m_0, uzyskany z wyrównania danego wariantu, przedstawimy wzorem:

$$m_0^2 = m_p^2 + m_t^2,$$

gdzie: m_p — wpływ błędów pomiaru na m_0, a m_t — wpływ na m_0 niedoskonałości teorii użytej w danym wariancie do interpretacji związków między obserwacjami. Stąd różnica kwadratów średnich błędów z poszczególnych wariantów będzie równa:

$$m_0^2 - m_{0d}^2 = m_p^2 + m_t^2 - m_{pd}^2 - m_{td}^2,$$

gdzie indeks d oznacza wariant, w którym uzyskano mniejszy średni błąd m_0, a więc wariant, którego teoria wydaje się być lepsza. Ponieważ materiał obserwacyjny w obu wariantach jest identyczny, możemy przyjąć, że $m_p = m_{pd}$. Przyjmując następnie bezbłędność teorii lepszej, czyli $m_{td} = 0$, przez co m_t oznaczać będzie wpływ niedoskonałości interpretacyjnej metody gorszej względem metody lepszej, otrzymamy ostatecznie:

$$m_t = \pm \sqrt{m_0^2 - m_{0d}^2}, \tag{162}$$

Średni błąd m_0 uzyskany w pierwszym wariancie był mniejszy i wyniósł $m_{0d} = \pm 0{,}0331$ mgal, a w wariancie drugim $m_0 = \pm 0{,}0343$ mgal.

Wynikałoby z tego, że metoda oparta o teorię sprężyny śrubowej jest lepsza, a wpływ niedoskonałości teorii opartej o założenie firmy Askania, na średni błąd pojedynczego spostrzeżenia, obliczony według wzoru (162), wynosi $m_t = \pm 0{,}009$ mgal. Wynik ten wydaje się być w zgodzie z wnioskami, wynikającymi z porównania rys. 14 z rys. 15.

Różnica między liczbowymi wartościami błędów m_0 i m_{0d} jest wprawdzie dość mała, ale jej istnienie uzasadnione jest wyłącznie przyjęciem różnych teorii jako oparcia w rozpatrywanych wariantach, gdyż jest to jedyna cecha różniąca oba warianty opracowania tego samego materiału obserwacyjnego. Poza tym materiał obserwacyjny jest bardzo bogaty. Ilość równań poprawek wynosi 183, ilość niewiadomych 42 co daje 141 obserwacji nadliczbowych. Średni błąd m_{m_0} średniego błędu m_0, liczony według wzoru:

$$m_{m_0} = \pm \frac{m_0}{\sqrt{2r}}\,.$$

podanego w podręcznikach [11] i [12], gdzie r — ilość obserwacji nadliczbowych, wynosi w naszym przypadku $m_{m_0} = \pm 0{,}002$ mgal.

Podobnym przykładem, wskazującym na istnienie błędu m_t w wariancie obliczeń, opartych o wzory firmy Askania, są wyrównania pomiarów, wykonanych na grawimetrycznej bazie lotniczej Kraków — Warszawa — Gdańsk. Błąd m_{0d} dla wariantu opartego o wzory, wynikające z teorii sprężyny śrubowej, wyniósł $m_{0d} = \pm 0{,}0253$ mgal; błąd m_0 dla drugiego wariantu wyniósł $m_0 = \pm 0{,}0262$ mgal. Stąd błąd m_t dla wariantu drugiego wyniósł $m_t = \pm 0{,}007$ mgal. Wyniki te mogą się wydawać jednak mniej przekonywujące, gdyż oparte są na dużo mniejszej ilości obserwacji, których liczba wynosi 5, z czego nadliczbowych 2.

Przed postawieniem ostatecznych wniosków dotyczących wyboru metody cechowania grawimetrów typu Askania Gs-11, trzeba jeszcze omówić kilka charakterystycznych wad i zalet obu rozpatrywanych metod cechowania.

Podstawową zaletą metody obliczeń, opartej o założenie firmy Askania jest nieskomplikowana postać wzoru (22), służącego do obliczeń Δg. Realizacja tego wzoru nie wymaga korzystania z tablic i jest bardzo szybka, co ma duże znaczenie w praktyce, gdyż obliczenia według wzoru (22) mają charakter masowy.

Istnieją natomiast trzy podstawowe wady powyższej metody. Wadą pierwszą jest — wykazywane powyżej — istnienie systematycznych błędów metody, które traktowane w sumie z błędami przypadkowymi obserwacji jako błędy przypadkowe, powodują zniekształcanie wyników obliczeń, które to zniekształcenia maleją dopiero wraz ze wzrostem ilości pomiarów cechujących.

Drugą wadą tej metody jest wieloznaczność otrzymywanych wyników. W wypadku łącznego wyznaczania współczynników a i b, dokładność wyznaczenia współczynnika b — jak to omówiono na początku punktu 5.1.2. — jest mała i równa niekiedy wartości samego współczynnika b. Dokładniejsze wyniki otrzymuje się wyznaczając b metodą podaną w punkcie 5.1.2. W obu wypadkach jednak uzyskujemy z każdego nowego cechowania nową wartość tego współczynnika b. Zmusza nas to, albo do ciągłego zmieniania wartości b, celem przyjęcia dokładniejszej wartości (średniej z wykonanych do danego momentu cechowań), albo do przyjęcia na stałe jednej, mało dokładnej wartości. Zmiana wartości współczynnika b jest bardzo kłopotliwa w obliczeniach służby cechowania, gdyż prowadzi do ponownego wyrównywania wszystkich obserwacji, wykonanych w ramach służby, służących do wyznaczenia współczynnika a i jego zmian.

W tablicy 14, dla ilustracji wieloznaczności wyznaczeń współczynnika b tą metodą, zestawiono jego wartości obliczone w różnych okresach. Dla porównania zamieszczono także wartość b, obliczoną sposobem podanym w rozdziale 8.

Tablica 14

nr cechowania IGiK	Wartość współczynnika b			
	uzyskana w danym cechowaniu		uzyskana jako średnia ważona od cechowania nr 7 do danego	
	b	m	b	m
	mgal/dz²			
7*	0,0003785	±0,0000350	0,0003785	±0,0000350
8	3346	320	3546	
9	2894	290	3287	
10	3038	350	3233	
11	3251	540	3234	190
Wartość współczynnika b, obliczona na podstawie A i $f(M, \Delta M)$, sposobem podanym w rozdziale 8.			0,0002883	±0,0000002

*) W cechowaniach nr nr 1—6 obserwacje wykonywano przy jednym położeniu kulki, co uniemożliwiało wyznaczenie współczynnika b metodą podaną w punkcie 5.1.2.

Trzecią wadą metody cechowania, opartej o założenie firmy Askania jest wysoki nakład pracy i kosztów, jaki należy ponieść, aby uzyskać względnie dokładne wyniki. Dość już dokładna wartość współczynnika b

uzyskana została dopiero po pięciu cechowaniach tzn. po wykonaniu około 600 obserwacji przy obu położeniach kulki na punktach bazowych, co wymagało w sumie pracy w ciągu około 60 dni i przejechania w tym czasie specjalnym samochodem pomiarowym około 10 000 km. Oczywiście dużej części tej pracy i tak nie da się uniknąć ze względu na konieczność wyznaczania współczynnika a lub A. Jednak w wypadku wyznaczania współczynnika b sposobem podanym w rozdziale 8 przez wykorzystanie znajomości funkcji $f(M, \Delta M)$ i A, obserwacje na bazach można ograniczyć do odczytów przy jednym położeniu kulki, co zmniejsza czas i nakład pracy.

Przechodząc obecnie do omówienia charakterystycznych cech metody cechowania i obliczeń, opartej o wzory wynikające z teorii sprężyny śrubowej, możemy od razu na wstępie stwierdzić, że sposoby rozwiązania pewnych zagadnień obu metod, obarczone w poprzedniej metodzie wadą, w tej stanowią zaletę i na odwrót. A więc wadą obecnie omawianej metody jest konieczność sporządzenia tablic funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$, a następnie konieczność korzystania z nich przy stosowaniu podstawowych wzorów metody.

Natomiast zaletami tej metody są: nieobarczanie wyników pomiarów błędami systematycznymi, uzyskiwanie jednoznacznych wyników dla wartości funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$ oraz ekonomika tych wyznaczeń. Dodatkową zaletą, jest możliwość wyznaczania za pomocą tej metody wartości współczynnika b — praktycznie biorąc — bezbłędnej. Do wyznaczenia funkcji $F(M)$ i $f(M, \Delta M)$, a więc także współczynnika b, potrzebne są jedynie kilkudniowe pomiary laboratoryjne elementów konstrukcyjnych grawimetru, opisane w punkcie 5.2.1. Na podstawie cechujących pomiarów polowych wyznacza się tylko wartość jednego współczynnika A i jego

Tablica 15

	współczynnik a mgal/dz	współczynnik A mgal/dz
wartość współczynnika na początek okresu służby tj. na I. 1958 dla temperatury termostatu 35°C. średni błąd	9,15757 ±0,00077	9,16291 ±0,00074
zmiana współczynnika na 10°C temperatury termostatu średni błąd	0,004468 ±0,00052	0,004382 ±0,00050
zmiana współczynnika na 1 rok średni błąd	0,001963 ±0,000182	0,001787 ±0,000175

zmienność. Z tego powodu można się ograniczyć do wykonywania obserwacji tylko przy jednym położeniu kulki.

W tablicy 15 podano wyniki obliczeń współczynników a i A (dla egzemplarza grawimetru nr 112), wyrównanych w ramach omawianych już dwóch wariantów opracowania materiału obserwacyjnego służby cechowania. Jak widać z zamieszczonych w tablicy 15 błędów wartości a i A i błędów współczynników ich zmienności od czasu i temperatury, współczynnik A wyznacza się dokładniej niż a.

Reasumując przeprowadzone rozważania należy postawić wniosek, że wszelkie opracowywanie materiału obserwacyjnego, uzyskanego z pomiarów grawimetrem Askania Gs-11, który ma służyć do wycechowania tego instrumentu, trzeba prowadzić w oparciu o wzory, wynikające z teorii sprężyny śrubowej. Jest to celowe zarówno ze względów dokładnościowych jak i ekonomicznych.

Natomiast pewną dowolność wyboru metody obliczeń można postulować przy masowych obliczeniach różnic przyspieszeń siły ciężkości Δg z pomiarów tym grawimetrem już wycechowanym. Również w wypadku bardzo precyzyjnych pomiarów należy stosować metodę, opartą o teorię sprężyny śrubowej, celem uniknięcia błędów systematycznych. Ale w wypadku masowych obliczeń Δg, w których średni błąd pomiaru Δg rzędu $\pm 0{,}03$ mgal jest zupełnie wystarczający, można stosować wzory wynikające z przyjęcia założenia firmy Askania, jednakże pod warunkiem, aby współczynniki a i b nie były obliczane bezpośrednio z pomiarów cechujących przy zastosowaniu wzorów tej metody, lecz zostaną wyznaczone na podstawie funkcji $f(M, \Delta M)$ oraz współczynnika A. W takim przypadku przy obliczeniach masowych uniknie się konieczności stosowania tablic, zachowując jednocześnie możliwie najwyższą precyzję obliczeń.

Na zakończenie przeprowadzonych rozważań należy podkreślić — o czym wspomniano już we wstępie — że konstrukcja grawimetru typu Gs-11 jest wyjątkowo udana i umożliwia uzyskanie wyników pomiaru o wysokiej dokładności. W tym celu należy jednak stale pamiętać o konieczności właściwego obchodzenia się z tym wysokoprecyzyjnym grawimetrem, szczególnie podczas przeprowadzania pomiarów, a także o potrzebie bardzo dokładnego wycechowania tego instrumentu. Do spełnienia ostatniego warunku mogą przyczynić się rozważania zawarte w niniejszej pracy.

LITERATURA

[1] *Schulze R.*: Gravimetermessungen über grosse Entfernungen, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, nr 35, München 1957.

[2] Schwermesser Gs-11, Askania-Werke A.G., Berlin 1956.

[3] *Żukowski S.*: Sprężyny, Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1955.

[4] *Huber M. T.:* Stereomechanika Techniczna, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, cz. 1, Warszawa 1951.

[5] *Ramsayer K.:* Gravimetereichung mit Eichgewichten. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, nr 16, München 1953.

[6] *Dobberstein H.:* Über die Federkonstante von Gravimetern, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, nr 19, München 1954.

[7] *Bokun J., Chojnicki T.:* Zagadnienie cechowania grawimetrów w Polsce, Prace IGiK, t. VIII, nr 2, Warszawa 1961.

[8] *Chojnicki T.:* Cechowanie grawimetru Askania Gs-11 w oparciu o dwie bazy grawimetryczne, Prace IGiK, t. IX, nr 2, Warszawa 1962.

[9] *Graf A.:* Gravimeter Messprinzipien, Aufbau, Messtechnik, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, nr 30, München 1957.

[10] *Hausbrandt S.:* Rachunki geodezyjne, Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa 1953.

[11] *Reissman G.:* Ausgleichungsrechnung. Verlag für Bauwesen, Berlin 1962.

[12] *Burmistrow G. A.:* Osnowy sposoba najmienszich kwadratow, Gosgeołtechizdat, Moskwa 1963.

Rękopis złożono w Redakcji w listopadzie 1965 r.

ТАДЭУШ ХОИНИЦКИ

МЕТОДЫ ЭТАЛОНИРОВАНИЯ ГРАВИМЕТРОВ ТИПА АСКАНИЯ GS-11

Резюме

Во введении этой работы приводится общая теория гравиметра Аскания GS-11 с подходом к вопросу похожим к способу, в каком Р. Шульце представил теорию гравиметра Аскания типа GS-12 [1]. Затем опираясь на эту общую теорию, выведено подробные формулы, для обработки измерений, выполненных этим гравиметром, при чем рассуждения идут по двум направлениям:

1. Вид функции, которая выступает в общем подходе к вопросу и определяет зависимость величины удлинения измерительной пружины гравиметра от силы, вызывающей это удлинение, принято гипотетически. Предположение это, называемое в дальнейшем предположением фирмы Аскания, вытекает из инструкции производителя, относящейся к способу исчисления результатов измерений [2].

2. Вид функции, объясненный в. п. 1, был определен на основе элементарной теории винтовой пружины.

Изложенные два направления рассуждений приводят к получению двух основных методов эталонирования и вычисления измерений, выполненных гравиметром GS-11. Для каждого метода разработано подробные формулы, учитывающие всевозможные проблемы техники измерений гравиметрами как: определение постоянных гравиметра, определение переменных коэффициентов гравиметра и способа их переменности, совместное уравнивание многолетних эталонных измерений, вычисление значений Δg и т.п. Кроме того выведено зависимости между двумя рассматриваемыми методами.

Исходной точкой для определения напрягающей силы измерительной пружины, как функции длины этой пружины на основе теории винтовой пружины, была известная формула на растяжение f такой пружины под нагрузкой P [3], [4],

$$f = \frac{LPR^2}{\mathbf{k}} \tag{1}$$

где: L — длина проволоки пружины, R — радиус витков пружины, k — произведение постоянных коэффициентов.

В дальнейшем в формуле (1) учитывалось изменяемость радиуса R в зависимости от удлинения пружины.

В результате таким образом исполненных рассуждений была выведена формула для вычисления разности ускорений силы тяжести Δg в виде:

$$\Delta g = AMf\,(M,\ \Delta M), \tag{2}$$

где: A — коэффициент определенный по измерениям на гравиметрическом базисе, ΔM — разность отсчетов шкалы гравиметра и $f(M, \Delta M)$ — коэффициент, являющийся функцией отсчета M шкалы на одном из измерительных пунктов и разности отсчетов по шкале ΔM.

Из инструкции фирмы Аскания [2], прилагаемой к каждому экземпляру этого гравиметра следует, что формулы на вычисление Δg можно представить в виде:

$$\Delta g = \Delta M\,(a + b\Sigma M), \tag{3}$$

где: a и b — коэффициенты определены по измерениям на базисах, ΣM — сумма отсчетов шкалы на обоих измерительных пунктах, между которыми измеряется Δg.

Различие между формулами (2) и (3) заключается в том, что при применении формулы (3) по измерениям на гравиметрических базисах нужно определить два коэффициента a и b, тогда как для формулы (2) только один A, ибо функцию $f(M, \Delta M)$ определяем другим способом, что будет изложено ниже. Это ведет к увеличению точности вычислений при помощи формулы (2) относительно к формуле (3), потому что функцию $f(M, \Delta M)$ можно определить с такой точностью, что влияние средней квадратической ошибки ей определения на вычисление Δg практически отсутствует.

В итоге того, что средние квадратические ошибки определения коэффициентов a и A имеют в приближении одинаковые влияния на вычисление Δg, формула (3) будет худшей от формулы (2) за счет влияния значительной средней квадратической ошибки определения коэффициента b на вычисление Δg. Максимальное — т.е. для $\Delta g \cong 800$ млг — влияние этой ошибки может достигать даже $\pm 0{,}6$ млг. Кроме того, для эталонирования гравиметра по формуле (2), т.е. для определения коэффициента A, хватит одного измерения на одном пролете с известным значением Δg, а не двух, как это необходимо для определения коэффициентов a и b формулы (3).

Функция $f(M, \Delta M)$ является многочленом, которого выражения образуют убывающий ряд. Для вычислений для практических целей хватит учитывать четыре члены.

Для определения коэффициентов отдельных членов нужны две величины: длина измерительной пружины — т.е. расстояние концов пружины, считаемое вдоль ее оси — при отсчете шкалы равным нулю (H_0) и длина проволоки пружины (L)

Так как эти величины нужно выразить в единицах шкалы гравиметра, нужно тоже определить значение единицы этой шкалы.

Для определения этих значений применено оригинальный метод: измерение произведено с помощью теодолита Вильд Т3 с расстояния 5 м, что позволило не дотрагиваться к прецизионным элементам гравиметра. Линейная точность измерения элементов гравиметра этим методом достигала около 4—9 микрон.

Максимальное влияние средней квадратической ошибки определения функции $f(M, \Delta M)$ этим методом на вычисление Δg оказалось равным $\pm 0{,}0042$ млг. Так как вычисление функции $f(M, \Delta M)$ для каждого измерения являлобысь слишком хлопотливым, в Институте геодезии и картографии была составлена В. Гедымином программа для составления таблиц этой функции на ЭВМ UMC-1. Измерение элементов и таблицы сделано в Польше для двух экземпляров гравиметра GS-11, а именно для инструментов № 110 и 112.

Разработанный был тоже способ определения коэффициентов a и b к формулам фирмы Аскания на основе знания функции $f(M, \Delta M)$ и коэффициента A.

Опираясь на наблюдательный материал был сделан анализ точности составлений, выполненных обоими методами, а также сделано выводы об наиболее правильном способе поведения при эталонировании этого типа гравиметров.

В пределах обработки многолетнего цикла эталонных измерений уравнено произведенные наблюдения опираясь на формулы (2) и (3). В случае применения для вычислений формулы (2), средняя квадратическая ошибка одиночного наблюдения уменьшалась в сравнении с результатом полученным из вычислений по формуле (3).

TEDEUSZ CHOJNICKI

CALIBRATING METHODS OF GRAVIMETERS TYPE ASKANIA GS-11

SUMMARY

The introduction to this paper gives a general theory of the gravimeter Askania Gs-11 in the form resembling that one in which R. Schulze has given the theory of the gravimeter type Askania Gs-12. Then basing on this general theory the detailed formulae were deduced for the elaboration of measurements performed with this gravimeter; the considerations, are carried on in two directions:

1. The shape of the function which appears in general form and determines the dependency of the magnitude of elongation of the measuring spring of gravimeter upon the force causing this elongation, is hypothetically admitted. This assumption which we call also Askania — assumption results from the producer's instruction concerning the system of computing the measurements results [2].
2. The shape of the function discussed ad. 1. is determined on the basis of elementary theory of the screw spring.

The above mentioned two directions permit to obtain two principal calibration and computation methods of measurements performed by means of gravimeter Gs-11. For each of these methods detailed formulase had been elaborated where the attention is given to all problems of measurement technics with gravimeters; such as: determination of gravimeter constants, determination of variable gravimeter coefficients and definition of the character of their variability, joint adjustment of calibrating measurements of many years standing, computation of the value Δg and so on. There are deduced also the connections between both discussed methods.

The starting point for the determination of the force which strains the measuring spring as a function of the longitude of the spring on the theory basis of the screw spring was the well-known formula for the elongation f of such a spring under load P [3], [4]:

$$f = \frac{LPR^2}{k} \tag{1}$$

where L = longitude of the spring wire, R = radius of spring coils,
k = product of constant factors. In the formula (1) was subsequently taken into consideration the variability of the radius R dependently upon the spring elongation.

As a result of considerations carried on in such a way a formula had been deduced for the computation of the difference of gravity acceleration Δg:

$$\Delta g = AMf(M, \Delta M) \tag{2}$$

where: A = coefficient determined by the measurements on the gravimetric basis, ΔM = difference of the readings of gravimeter scale, $f(M, \Delta M)$ = coefficient being the function of reading, M of the scale on the one of measurements points and of the difference of readings of the scale ΔM.

As it follows from the Askania instructions [2] annexed to every gravimeter the formula for the computation Δg can be written down as follows:

$$\Delta g = \Delta M(a + b\Sigma M), \tag{3}$$

where: a and b = coefficients determined by the measurement points between which Δg is measured.

The difference between the formulae (2) and (3) consists in following: at the application of formula (3) two coefficients a and b must be determined from the measurements on the gravimetric bases while for the formula (2) the determination of only one coefficient A is needed because the function $f(M, \Delta M)$ will be determined in another way (as will be shown). Its consequence is the increase of the computation accuracy by means of the formula (2) in relation to the formula (3) owing to the fact that the function $f(M, \Delta M)$ can be determined with such an accuracy that the effect of the mean square error of its determination on the computation Δg doesn't practically exist.

Since the influences of the mean square errors of the determination of coefficients a and A on the computation Δg are approximatively equal, the formula (3) will be worse than the formula (2), as a result of the influence of the mean square error of determination of coefficient b on the computation Δg which is considerable enough. The maximal i. e. for $\Delta g \cong 800$ mgal — effect of this error can amount even to ± 0.6 mgal. Moreover, for the calibration of the gravimeter according to the formula (2) i. e. for the determination of the coefficient A, the measurement of one only bay which known value Δg will do. The measurement on two bays as it necessary for the determination of the coefficients a and b in the formula (3) is superfluous.

The function $f(M, \Delta M)$ is a polynomial the terms of which create a decreasing sequence. For the computation for the practical purposes it suffices to consider four terms.

In order to determine the coefficients of individual terms two magnitudes are necessary: longitude of the measuring spring, i. e. the distance between two spring ends counted along its axis — for the reading of the scale equal to zero (H_0) and the longitude of spring wire (L). Because these magnitudes must be expressed in units of the gravimeter scale it is also necessary to determine also the value of unit of this scale too.

For the determination of these magnitudes an original method was applied; the measurement had been performed by means of the theodolite Wild T3 from the distance of about 5 m; it permitted at the same time to preserve the precise parts of the gravimeter from the aceidentally touching. The linear accuracy of the measurements of gravimeter elements with this method amounted to ca. 4—9 microns.

The maximal effect of the mean square error of the determination of function $f(M, \Delta M)$ with this method on the computation Δg was ± 0.0042 mgal.

The computation of the function $f(M, \Delta M)$ for each measurement would be too troublesome. Therefore in the Institute of Geodesy and Cartography had been elaborated up by Mr W. Gedymin a computation programme in order to perform the tables of this function on the electronic compute UMC 1. The measurements of the elements and the tables were made in Poland for two gravimeters Gs-11, viz. for the instruments No 110 and No 112.

A system of determination of the coefficients a and b for the formula of Askania House had been elaborated on the basis of the knowledge of the function $f(M, \Delta M)$ and of the coefficient A.

Basing on the observation materials an accuracy analysis of the elaborations done by means of both methods had been performed and conclusions deduced as to the most proper system of procedure during the calibration of this type of gravimeters.

In the course of the elaboration of calibrating measurements of a cycle of several years, the performed observations were adjusted according to the formulae (2) ans (3). In the case of the application of the formula (2) to the computations the mean square error of a single observation decreased in relation to the result of the computations when the formula (3) was applied.