

Porównanie przybliżonych sposobów wyrównania sieci poligonowych

(na podstawie kilku przykładów liczbowych)

1.

Z punktu widzenia teorii błędów wyrównanie sieci poligonowych, tak jak i wszystkich układów obserwacyjnych, powinno się odbywać według zasad metody najmniejszych kwadratów. Ta piękna w swej ogólności metoda ma dla praktyka jedną wadę — jest pracochłonna. Z tego względu znalazły zastosowanie różne sposoby wyrównania, których autorzy, rezygnując ze ścisłości rozumowania, w oparciu o pewne upraszczające założenia osiągnęli naogół znaczne zmniejszenie prac rachunkowych.

Celowość stosowania w praktyce zarówno metody najmniejszych kwadratów jak i sposobów przybliżonych nie podlega dyskusji. Opracowanie rachunkowe wartościowego materiału obserwacyjnego otrzymanego w wyniku precyzyjnych, a tym samym kosztownych pomiarów, przeprowadza się przy pomocy metody najmniejszych kwadratów, pozwalającej na obliczenie najbardziej prawdopodobnego układu poprawek wyrównawczych. Natomiast tam, gdzie nie zależy nam na osiągnięciu większej dokładności, a więc na przykład przy wyrównaniu osnów poligonowych zakładanych dla celów urzędzeniowo-rolnych, znajdują zastosowanie sposoby przybliżone.

Ustalenie, w jakich konkretnych przypadkach ma być użyta metoda najmniejszych kwadratów, a w jakich można z niej zrezygnować jest trudne. Praca niniejsza stanowi próbę naświetlenia tego zagadnienia od strony wartości uzyskiwanych wyników, w oparciu o rezultaty wyrównania szeregu sieci poligonowych metodą najmniejszych kwadratów i różnymi sposobami przybliżonymi.

Istotą sposobów przybliżonych jest obliczenie elementów węzłowych (tzn. azymutów i współrzędnych), ponieważ wyznaczenie ich sprowadza zagadnienie wyrównania sieci do prostego rachunkowo wyrównania pojedynczych ciągów. Jest rzeczą oczywistą, że dokładność wyznaczenia elementów węzłowych wpływa w sposób decydujący na dokładność wyników

wyrównania całej sieci. W związku z tym, porównując przybliżony sposób wyrównania sieci z metodą najmniejszych kwadratów, weźmiemy pod uwagę uzyskane wartości elementów węzłowych. Pewną trudność sprawia tutaj niejednoznaczność pojęcia azymutu węzłowego w sposobach przybliżonych. Obliczony bowiem w wyniku wyrównania węzłowego azymut węzłowy ulega z reguły zmianom w efekcie wyrównania przyrostów współrzędnych na ciągu. Z tego względu najśluszniej chyba będzie przeprowadzić porównanie dla jednych i drugich wartości azymutów węzłowych.

Za kryterium dokładności danego sposobu przybliżonego, zastosowanego do wyrównania danej sieci, przyjmiemy wielkość $\eta_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum \frac{\eta_i \eta_i}{m m}}{n}}$,

gdzie η jest różnicą wartości elementu węzłowego, otrzymanych przy pomocy metody najmniejszych kwadratów i sposobu przybliżonego, m — odpowiednim błędem średnim elementu węzłowego, zaś n oznacza ilość wszystkich elementów węzłowych, równą potrójnej ilości węzłów.

Zgodnie z tym co było powiedziane powyżej, będziemy rozróżniać wielkości η_0 w zależności od rodzaju przyjętych do obliczenia azymutów węzłowych. Mianowicie, przez η'_0 oznaczmy wielkość, do której obliczenia użyto azymut węzłowy uzyskany z wyrównania węzłowego, zaś przez η''_0 wielkość, do której obliczenia użyto azymut węzłowy wynikający ze współrzędnych wyrównanych.

Oczywiście bardziej miarodajne byłoby operowanie błędami prawdziwymi ε zamiast wprowadzonych tu różnic η . Taki program badań wiązałby się jednak z poniesieniem znacznych kosztów na wykonanie specjalnych, dwukrotnych pomiarów o tak dobranych dokładnościach, aby przy porównaniu wyników można było w praktyce przyjąć, że mamy do czynienia z błędami prawdziwymi jednego z dokonanych pomiarów (mniej dokładnego).

Autorzy artykułu wykorzystali do badań materiały obserwacyjne znajdujące się w dyspozycji Przedsiębiorstw Mierniczych oraz materiały przytaczane w literaturze geodezyjnej.

2.

Omówimy teraz pokrótce przybliżone sposoby wyrównania sieci poligonowych. Wszystkie sposoby przybliżone opierają się na ogólnym założeniu upraszczającym — jako niezależne obserwacje traktuje się w nich i wyrównuje wzajemnie zależne funkcje obserwacji. Funkcjami tymi są najczęściej sumy kątów i sumy przyrostów współrzędnych obliczonych po wyrównaniu kątowym na poszczególnych ciągach.

Wprowadzimy podział sposobów przybliżonych na dwie grupy. Do pierwszej zaliczymy sposoby przeprowadzające oddzielnie wyrównanie

sum kątów, przyrostów x i przyrostów y ; do drugiej zaś sposoby, w których wyrównanie wszystkich funkcji obserwacji odbywa się jednocześnie.

Zajmiemy się najpierw pierwszą grupą. Różnice między należącymi do niej sposobami nie są istotne i wynikają głównie z zastosowania do wyrównania funkcji obserwacji jednego z trzech wariantów metody najmniejszych kwadratów: 1) wyrównania spostrzeżeń bezpośrednich, 2) wyrównania spostrzeżeń pośredniczących, 3) wyrównania spostrzeżeń zawrunkowanych.

Jak wiadomo, wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich odbywa się na zasadzie ogólnej średniej arytmetycznej. Korzysta z tej zasady sposób wyrównania węzłowego. Obliczenie wyrównanych wartości elementów węzłowych: azymutu A i współrzędnych x , y w przypadku jednego węzła nie nastęrcza trudności. W przypadku większej ilości węzłów sposób wyrównania węzłowego, polecający utworzenie ogólnych średnich arytmetycznych dla wartości dających się obliczyć przy pomocy pewnej ilości ciągów, nie jest jednoznaczny. Poprawnie to zagadnienie rozwiązuje sposób równoważnej zamiany, w którym wyrównanie sieci wielowęzłowej sprowadza się do wyrównania pojedynczego węzła poprzez utworzenie ciągów zastępczych o odpowiednio obliczonych wagach. Zwykle wyrównanie węzłowe jest sposobem najłatwiejszym, nie stosuje jednak konsekwentnie metody najmniejszych kwadratów do funkcji obserwacji. Natomiast sposób równoważnej zamiany staje się zbyt skomplikowany w przypadkach większych sieci.

Na wyrównaniu spostrzeżeń pośredniczących bazuje sposób węzłów Popowa oraz sposób kolejnych przybliżeń. W pierwszym z tych sposobów układa się równania poprawek dla sum kątów na poszczególnych ciągach*, zestawia równania normalne, których rozwiązanie daje wartości azymutów węzłowych A , po czym przeprowadza się wyrównanie kątów. W oparciu o wyrównane kąty oblicza się sumy przyrostów współrzędnych i układa dla nich równania poprawek. Zestawienie dwu układów równań normalnych (dla współrzędnych x i y) pozwala na obliczenie wartości współrzędnych punktów węzłowych.

Autorem pewnej modyfikacji tego sposobu jest inż. Domosławski, który proponuje układać równania poprawek dla sum przyrostów współrzędnych, obliczonych przy wykorzystaniu kątów zaobserwowanych (nie wyrównanych na ciągach). Azymuty węzłowe, wyjściowe w rachunku przyrostów, oblicza się tu analogicznie jak w sposobie Popowa.

Wartości elementów węzłowych A , x , y możemy uzyskać również na drodze wyrównania sposobem kolejnych przybliżeń. W sposobie tym

* Obydwa sposoby Popowa, to znaczy sposób węzłów i omawiany dalej sposób poligonów, przedstawia się zazwyczaj pod postacią szeregu reguł pozwalających między innymi na bezpośrednie zestawienie układów równań normalnych elementów węzłowych (w sposobie węzłów) lub korelat (w sposobie poligonów).

$i + 1$ przybliżenie wartości elementu węzłowego otrzymujemy jako ogólną średnią arytmetyczną z wartości dających się obliczyć przy pomocy i -tych przybliżeń sąsiednich elementów węzłowych (sąsiednimi nazywamy te elementy, które są połączone jednym ciągiem). Ilość przybliżeń potrzebna do wyrównania sieci zależy od jej kształtu. W literaturze radzieckiej podaje się, że jeśli stosunek ilości spostrzeżeń nadliczbowych do niezbędnych jest mniejszy od 1.5 — 2.0, to ilość przybliżeń może być znaczna i stosowanie tego sposobu nie jest celowe.

Metodę spostrzeżeń zawarunkowanych zastosował Popow w swoim sposobie poligonów. Sposób ten polega na ułożeniu i rozwiązaniu równań warunkowych początkowo dla sum kątów, a później dla obliczonych — po wyrównaniu kątów — sum przyrostów współrzędnych.

Należy podkreślić, że z wyjątkiem zwykłego wyrównania węzłowego (dla ilości węzłów większej od jednego) i modyfikacji Domosławskiego, omówione powyżej sposoby dają zasadniczo te same wyniki. Natomiast w zależności od kształtu sieci, występują pewne różnice w pracochłonności. Wyrównanie większych sieci niezależnych może być z korzyścią wykonane przy pomocy sposobu poligonów. W sieciach nawiązanych na ogół wskazane jest stosowanie sposobu węzłów, ewentualnie kolejnych przybliżeń. Wyrównanie niewielkich sieci daje się łatwo przeprowadzić sposobem równoważnej zamiany. Zwykle wyrównanie węzłowe, niewątpliwie najprostsze, może być stosowane w odniesieniu do sieci o różnorodnym kształcie.

W sposobach przybliżonych pierwszej grupy przy wyrównaniu kątów nie bierze się pod uwagę uzyskanych odchyłek f_x i f_y . Tej wady nie posiadają dwa sposoby drugiej grupy, przeprowadzające jednoczesne wyrównanie wszystkich elementów węzłowych. Jednym z tych sposobów jest tak zwany „uogólniony” sposób węzłów Popowa. W sposobie Popowa równania poprawek sum przyrostów współrzędnych zawierają, jako niewiadome, zmiany różniczkowe dx i dy współrzędnych punktów węzłowych. Natomiast w sposobie „uogólnionym” równania te zawierają także zmiany różniczkowe dA azymutów węzłowych. Istnienie związków między wartościami azymutów i współrzędnych węzłowych pozwala na przeprowadzenie jednoczesnego wyrównania funkcji obserwacji.

Drugi sposób, tak zwany sposób fikcyjnych spostrzeżeń, różni się od wszystkich poprzednich wprowadzeniem do wyrównania innych funkcji obserwacji. Są nimi „fikcyjne długości” obliczone z sum przyrostów współrzędnych na poszczególnych ciągach oraz „fikcyjne kąty”, z których każdy zawarty jest między kierunkami wyznaczonymi przez punkt węzłowy, przywęzłowy i linię zamykającą ciąg. (Punkt węzłowy łącznie z punktem przywęzłowym wyznacza azymut węzłowy, zaś linia zamykająca ciąg łączy ze sobą po prostej dwa punkty węzłowe, ewentualnie punkt węzłowy i punkt stały). Do obliczenia przyrostów używa się tu

kątów i długości pomierzonych. Fikcyjne obserwacje poddaje się wyrównaniu metodą spostrzeżeń pośrednich.

Zaletą sposobów grupy drugiej jest możliwość przeprowadzenia wyrównania sieci poligonowych z nawiązaniem bocznymi, to jest z dodatkowymi nawiązaniem kątowymi do punktów stałych, wykonanymi na punktach poligonowych. Sposobami należącymi do pierwszej grupy zagadnienia tego rozwiązać nie można.

Oprócz omówionych powyżej sposobów przybliżonych, w literaturze spotyka się jeszcze inne, które na ogół różnią się między sobą w mało istotnych szczegółach i dają się zakwalifikować do grupy pierwszej.

W każdym ze sposobów przybliżonych, opierających się na schemacie rachunkowym metody najmniejszych kwadratów, mogą być zastosowane pojęcia i wzory tej metody dotyczące charakterystyki dokładnościowej wyrównywanych wielkości. Charakterystyka ta będzie oczywiście również przybliżona, co wynika z postawienia zasadniczych założeń upraszczających.

Jeszcze parę słów należy poświęcić problemowi wagowania poddawanych wyrównaniu funkcji obserwacji. Żadnego kłopotu nie sprawia rachunek wag, czy też błędów średnich, dla sum kątów. Natomiast wzory na błędy średnie sum przyrostów współrzędnych obliczonych po wyrównaniu kątów są dość skomplikowane i pracochłonne w realizacji. Z tego względu przyjmuje się często przy wyrównaniu sieci mało dokładnych, że wagi sum przyrostów są odwrotnie proporcjonalne do długości ciągów. Jednak wyrównanie sieci dokładniejszych winno być przeprowadzone z wykorzystaniem wag, obliczonych ze wzorów uwzględniających przede wszystkim stosunek błędów średnich pomiarów kątowych i liniowych. Wzory te przybierają szczególną prostą formę dla ciągów prostoliniowych i równobocznych. Jak wykazuje doświadczenie, mogą być one stosowane również do ciągów dość znacznie odbiegających swym kształtem od prostoliniowości i równoboczności.

3.

W dalszym ciągu artykułu zajmiemy się omówieniem wyników wyrównania kilku sieci poligonowych metodą najmniejszych kwadratów oraz niektórymi sposobami przybliżonymi.

Ze sposobów należących do grupy pierwszej wybrano:

1 — Sposób węzłowy z wagami obliczonymi według wzorów: $P_a = \frac{1}{n}$;

$$P_x = P_y = \frac{1}{L}$$

gdzie: n — ilość kątów ciągu

L — suma długości boków ciągu

Ciąg	Nr p-ktu	α obs.	A	$\cos A$ $\sin A$	d obs.	Δx	Δy	x przybl.	y przybl.	d przybl.	$l = \frac{d_{prz.} - d_{obs.}}{m_d = \frac{d}{10000}}$	ctg A	A	α przybl.	$l = \frac{\alpha_{prz.} - \alpha_{obs.}}{m_\alpha = 10''}$	$\frac{\rho''}{d}$	$\frac{A_L}{m_\alpha}$ $\frac{A_P}{m_\alpha}$	$\frac{B_L}{m_\alpha}$ $\frac{B_P}{m_\alpha}$	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	Nr p-ktu	$\frac{dx_i}{m_d} \frac{dy_i}{m_d}$ $\frac{dx_k}{m_d} \frac{dy_k}{m_d}$
I	A'		118 01 20										118°01'20''						$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	A'	
	A	151°29'16''												151°29'16''	0''				$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	A	$\frac{1}{0,2} \frac{18,9}{18,9}$
	1	181 10 14	89 30 36	0,00855 0,99996	530,27	4,53	530,25	2000,00	4,53	530,27	0	0,00854	89 30 36			38,92	0,3	38,9	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	1	$\frac{1}{0,2} \frac{18,9}{18,9}$
	2	332 39 30	90 40 50	-0,01188 0,99993	545,29	-6,48	545,25	2004,53	534,78	545,29	0	-0,01188	90 40 50	181 10 14	0	37,85	-0,4	37,8	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	2	$\frac{1}{0,2} \frac{18,5}{18,5}$
II	1		90 40 50					1998,05	1080,03				90 40 50							1	
	2	177 11 02	87 51 52	0,03726 0,99931	570,02	21,24	569,63	1998,05	1080,03	570,02	0	0,03729	87 51 52	177 11 02	0	36,19	1,3	36,2	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	2	$\frac{2}{-0,6} \frac{17,5}{17,5}$
	3	180 58 08	88 50 00	0,02036 0,99979	510,15	10,39	510,04	2019,29	1649,66	510,15	0	0,02037	88 50 00	180 58 08	0	40,44	0,8	40,4	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	3	$\frac{3}{-0,4} \frac{19,6}{19,6}$
	4	358 09 10						2029,68	2159,70											4	
III	3		88 50 00							88 50 00			88 50 00							3	
	4	180 08 10	88 58 10	0,01799 0,99984	490,12	8,82	490,04	2029,68	2159,70	490,12	0	0,01800	88 58 10	180 08 10	0	42,09	0,8	42,1	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	4	$\frac{4}{-0,4} \frac{20,4}{20,4}$
	5	179 15 15	88 13 25	0,03100 0,99952	450,03	13,95	449,81	2038,50	2649,74	450,09	+6	0,03168	88 11 08	179 12 58	-137	45,84	1,4	45,8	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	5	$\frac{5}{-0,7} \frac{22,2}{22,2}$
	B	121 47 12	30 00 37			14,25	449,86	2052,75	3099,60				30 00 42	121 49 34	+142					B	
IV	B'	481 10 37	30 00 42																	B'	
	1		90 40 50							90 40 50			90 40 50							1	
	2	100 12 12	10 53 02	0,98201 0,18882	510,51	501,33	96,39	1998,05	1080,03	510,51	0	5,20106	10 53 02	100 12 12	0	40,36	39,6	7,6	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	2	$\frac{2}{-19,3} \frac{3,7}{3,7}$
	6	192 00 10	22 53 12	0,92128 0,38891	485,00	446,82	188,62	2499,38	1176,42	484,99	-1	2,37208	22 51 31	191 58 29	-101	42,53	39,2	16,5	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	6	$\frac{6}{-18,8} \frac{7,9}{7,9}$
V	C	64 10 00	267 03 12			446,90	188,40	2946,28	1364,82				267 03 32	64 12 01	121					C	
	C'	356 22 22	267 03 32																	C'	
	3		88 50 00							88 50 00			88 50 00							3	
	4	273 00 05	181 50 05	-0,99949 -0,03201	475,02	-474,78	-15,21	2029,68	2159,70	475,02	0	31,215	181 50 05	273 00 05	0	43,42	-43,4	-1,4	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	4	$\frac{4}{20,8} \frac{0,7}{0,7}$
	7	167 29 22	169 19 27	-0,98269 0,18525	500,30	-491,64	92,68	1534,90	2144,49	500,33	+3	-5,28261	169 16 51	265 14 29	149	41,25	-40,5	7,6	$\frac{dx_L}{m_\alpha} \frac{dy_L}{m_\alpha}$ $\frac{dx_P}{m_\alpha} \frac{dy_P}{m_\alpha}$ $-\left(\frac{A_L - A_P}{m_\alpha}\right)$ $-\left(\frac{B_L - B_P}{m_\alpha}\right)$	7	$\frac{7}{19,7} \frac{-3,7}{-3,7}$
	D	265 12 00	254 31 27			-491,60	93,06	1063,30	2237,55				254 31 20							D	
	D'	705 41 27	254 31 20																	D'	
			$f_\alpha = -7''$																		

W tabeli pominięto oznaczenia dx oraz dy , pozostawiając tylko numery punktów.

Równania poprawek, równania normalne i ich rozwiązanie

	-10	5	-1	-8	10	15	20	-10	6	5	-5	-10	12	10	niewiadome kontrolne			
	1	2			6		3		4		7		5		l	S	V_k	$\frac{v}{m}$
A	-38.9	0.3													0	-38.6	39"	-1.1
1	76.7	0.1	-37.8	-0.4											0	38.6	-73	-0.9
2	-37.8	-0.4	74.0	-0.9			-36.2	1.3							0	0	-43	-0.2
3			-36.2	1.3			76.6	-2.1	-40.4	0.8					0	0	134	-0.5
4							-40.4	0.8	82.5	-1.6			-42.1	0.8	0	0	-83	0.5
5									-42.1	0.8			87.9	-2.2	-13.7	30.7	-59	1.1
B													-45.8	1.4	14.2	-30.2	88	1.4
2 ^a	-37.8	-0.4	45.4	-39.2	-7.6	39.6									0	0	116	-0.5
6			-7.6	39.6	24.1	-78.8									-10.1	-32.8	-226	1.4
C					-16.5	39.2									12.1	34.8	163	3.2
4 ^a							-40.4	0.8	39.0	42.6	1.4	-43.4			0	0	6	-1.3
7									1.4	-43.4	6.2	83.9			-15.6	32.5	-264	0.7
D											-7.6	-40.5			14.9	-33.2	193	2.6
A-1	0.2	18.9													0	19.1	4 cm	-1.1
1-2	0.2	-18.5	-0.2	18.5											0	0	-13	-1.1
2-3			-0.4	-17.5			0.6	17.5							0	0	-1	3.0
3-4							-0.4	-19.6	0.4	19.6					0	0	15	2.7
4-5									-0.4	-20.4			0.4	20.4	0	0	5	-1.5
5-B													-0.7	-22.2	1.3	-21.6	-4	-1.4
2-6			-19.3	-3.7	19.3	3.7									0	0	15	0.1
6-C					-18.8	-7.9									-0.2	-26.9	-16	-0.7
4-7									20.8	0.7	-20.8	-0.7			0	0	11	1.6
7-D											19.7	-3.7			0.6	16.6	3	2.5
	10254	26	-7413	1489	287	-1497	1368	-49							0	4466		
		700	-48	-326	3	-16	14	0							0	353		
			10707	-2101	-901	2325	-5452	162	1462	-29					77	-1211		
				3770	1181	-4686	122	-310	-53	1					-400	-1313		
					1637	-2627									-439	-859		
						4390									1272	4161		
							10443	-254	-8008	-1603	-57	1753	1701	-32	0	0		
								698	173	-353	1	-35	-34	1	0	0		
									12167	1433	-369	-1590	-7174	150	555	-1249		
										4503	-224	-5491	130	-420	666	-1387		
											919	709			-198	781		
												10577			-1915	4008		
													11597	-267	-1855	4098		
														916	21	369		
	101.3	0.3	-73.2	14.7	2.8	-14.8	13.5	-0.5							0	44.1	44.1	
		26.5	-1.0	-12.5	0.1	-0.4	0.4	0							0	12.8	13.1	
			73.1	-14.0	-9.5	17.0	-61.1	1.7	20.0	-0.4					1.1	27.8	27.9	
				56.6	17.8	-74.8	-16.4	-4.9	4.0	-0.1					-6.8	-24.9	-24.6	
					35.0	-31.2	-9.3	3.0	3.4	-0.1					-8.8	-7.9	-8.0	
						48.1	-5.8	-6.4	1.4	-0.1					9.8	46.5	47.0	
							78.3	-3.0	-85.3	-20.8	-0.7	22.4	21.7	-0.4	-0.9	11.3	11.3	
								24.7	-4.0	-16.8	0	1.3	1.3	0	2.1	8.4	8.6	
									66.7	-6.0	-6.4	4.9	-79.7	1.7	7.6	-11.2	-11.2	
									61.3	-4.5	-81.1	2.0	-6.8		11.9	-17.4	-17.2	
										29.3	13.3	-16.6	-0.7	-3.3	21.8	22.0		
											57.4	5.0	-9.4	-16.1	36.5	36.9		
												66.8	-1.1	-18.4	47.4	47.3		
													27.9	-3.1	24.5	24.8		
	0.029	-0.060	0.085	-0.123	0.102	-0.185	0.154	0.048	0.225	0.184	0.147	0.275	0.277	0.111	niewiadome			

$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = 59$$

$$[ll] - [LL] =$$

$$= 1105 - 1044 = 61$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{59}{9}} = \pm 2,6$$

Wyrównywana sieć ze względu na niewielką ilość punktów wyznaczonych stanowi szczególnie dobry materiał przykładowy. Jednakże, jako nietypowa, nie została wzięta pod uwagę przy wyciąganiu wniosków.

W tablicach 1, 2, 3 i 4 przeprowadzono wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów (sposobem pośredniczącym). Zastosowano wzory podane w Rachunkach Geodezyjnych prof. St. Hausbrandta, str. 81 — rozdział dotyczący wyrównania sieci kątoowo-liniowych. Równania poprawek ułożone zostały po uprzednim podzieleniu współczynników przy niewiadomych i wyrazów wolnych przez odpowiednie błędy średnie obserwacji. Układ równań poprawek skontrolowano (patrz tablica 3) przyjmując pewne przyrosty różniczkowe dx i dy współrzędnych przybliżonych i obliczając, przez podstawienie do równań poprawek, odpowiadające im przyrosty różniczkowe obserwacji. Po dodaniu tych przyrostów do odpowiednich obserwacji powinniśmy uzyskać wartości identyczne z obliczonymi bezpośrednio z współrzędnych przybliżonych poprawionych o przyrosty różniczkowe. Dopiero po wykonaniu kontroli układu równań poprawek, ułożono równania normalne i rozwiązano je przy pomocy pierwiastka krakowianowego (patrz dolna część tablicy 2). Każdy z tych etapów rachunku kontrolowany był przez obliczenie sum współczynników w wierszach dwoma niezależnymi drogami. Dodatkowo sprawdzono, że zachodzi w granicach dokładności rachunku równość: $\left[\frac{vv}{mm} \right] = \left[\frac{ll}{mm} \right] - |LL|$.

Warto jest zwrócić uwagę, że jakkolwiek wyrównanie poligonizacji metodą pośredniczącą wykonuje się już w Polsce od kilku lat, to jednak nie został opublikowany przykład takiego wyrównania.

W tablicach 5 — 12 przedstawiono wyrównania sposobami wymienionymi na stronie 91. Sposoby te już pokrótce omówiliśmy w punkcie 2 artykułu; zainteresowanych szczegółami rachunku odsyłamy do literatury źródłowej.

Z uwagi na wieloznaczność sposobu wagowania wyrównywanych funkcji, podamy tu jedynie wzory zastosowane w przykładzie.

$$m_a = m_0 \cdot \sqrt{k}$$

$$\begin{pmatrix} m_x^2 \\ m_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{m_d}{d} \right)^2 \\ m_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \Delta x^2 & n \Delta y^2 \\ \frac{1}{12} k (k^2 - 1) \Delta y^2 & \frac{1}{12} k (k^2 - 1) \Delta x^2 \end{pmatrix}$$

gdzie n — ilość boków w ciągu

k — ilość kątów

$\Delta x, \Delta y$ — średnie wartości przyrostów współrzędnych na boku danego ciągu.

Obliczenie błędów średnich m_x i m_y dla poszczególnych ciągów podane jest w tablicy 9. Kwadraty średnich błędów współrzędnych wynika-

Tablica 3

Kontrola równań poprawek

Ciąg	Nr p-ktu	x_k	y_k	Δx_k	Δy_k	d_k	$d_{obs} + V_k$	$\text{ctg } A_k$	A_k	α_k	$\alpha_{obs} + V_k$
I	A'										
	A	2000,00	4,53	4,43	530,30	530,32	530,31	0,00835	118°01'20"	151°29'58"	55"
	1	2004,43	534,83	—	545,12	545,16	545,16	— 0,01172	89 31 18	181 09 00	01
	2	1998,04	1079,95						90 40 18		
II	1	1988,04	1079,95	21,45	569,61	570,01	570,01	0,03766	90 40 18	177 10 18	19
	2	2019,49	1649,56	10,25	510,19	510,29	510,30	0,02009	87 50 36	181 00 20	22
	3	2029,74	2159,75						88 50 56		
	4								88 50 56		
III	3	2029,74	2159,75	8,88	490,09	490,17	490,17	0,01312	89 57 43	180 06 46	47
	4	2038,62	2649,84	14,13	449,76	449,99	449,99	0,03142	88 12 02	179 14 19	16
	5	2052,75	3099,60						30 00 42	121 48 40	40
	B'										
IV	1	1998,04	1079,95	501,44	96,62	510,66	510,66	5,18982	90 40 18	100 14 05	08
	2	2499,48	1176,57	446,80	188,25	484,84	484,83	2,37344	10 54 23	191 56 27	24
	C	2946,28	1364,82						22 50 50	64 12 42	43
	C'								267 03 32		
V	3	2029,74	2159,75	— 474,89	— 15,36	475,14	475,13	30,917	88 50 56	273 00 13	11
	4	1554,85	2144,39	— 491,55	93,16	500,30	500,30	5,27641	181 51 09	167 24 57	58
	7	1063,30	2237,55						169 16 06	265 15 14	13
	D								254 31 20		
	D'										

Wartości wyrównane elementów węzłowych

$$\begin{aligned}
 A_{1-2} &= 90^{\circ}40'50'' - 20'' = 90^{\circ}40'30'' & x_2 &= 1998,05 + 0,085 = 1998,14 \\
 A_{3-1} &= 88^{\circ}50'00'' - 27'' = 88^{\circ}49'33'' & y_2 &= 1080,03 - 0,123 = 1079,91 \\
 & & x_4 &= 2029,68 + 0,225 = 2029,91 \\
 & & y_4 &= 2159,70 + 0,184 = 2159,88
 \end{aligned}$$

Tablica 5

Obliczenie przyrostów współrzędnych w oparciu o wyrównane kąty

(przyrosty te wykorzystane są do wyrównania sposobem węzłowym, Popowa i równoważnej zamiany w związku z identycznością obliczonych azymutów węzłowych)

Nr ciągu	Nr punktu	$\alpha_{wyr.}$	$A_{wyr.}$	$\cos A$	$\sin A$	d	Δx	Δy
I	A'							
	A	151 29 19	118 01 20				4,52	530,25
	1	181 10 17	89 30 30	0,00853	0,99996	530,27	— 6,49	545,25
	2		90 40 56	— 0,01191	0,99993	545,29	— 1,97	1075,50
II	1							
	2	177 11 00	90 40 56				21,23	569,63
	3	180 58 06	87 51 56	0,03725	0,99931	570,02	10,38	510,04
	4		88 50 02	0,02035	0,99979	510,15	31,61	1079,67
III	3							
	4	180 08 11	88 50 02				8,81	470,04
	5	179 15 16	88 53 13	0,01797	0,99984	490,12	13,94	449,81
	B	121 47 13	88 13 29	0,03097	0,99952	450,03	22,75	939,85
IV	B'		30 00 42					
	1							
	2	100 12 17	90 40 56				501,32	96,42
	6	192 00 14	10 53 13	0,98200	0,18887	510,51	446,81	188,66
V	C	64 10 05	22 53 27	0,92125	0,38898	485,00	948,13	285,08
	C'		267 03 32					
	3							
	4	273 00 12	88 50 02				— 474,78	— 15,21
	7	167 29 19	181 50 04	— 0,99949	— 0,03201	475,02	— 491,63	92,69
	D	265 11 57	169 19 23	— 0,98268	— 0,18527	500,30	— 966,41	77,48
	D'		254 31 20					

Tablica 6

WYRÓWNANIE SPOSOBEM WĘZŁOWYM

Nr ciągu	A_{1-2}	$P = \frac{1}{n}$	v	Nr ciągu	A_{3-4}	$P = \frac{1}{n}$	v
I	90°40'50''	5,0	5	III	88 50 05	3,3	- 2
IV	41 10	3,3	- 15	V	49 53	3,3	10
III, II	40 55	2,0	0	II, I	50 00	2,5	3
V, II	40 43	2,0	12	IV, II	50 20	2,0	- 17
		12,3				11,1	
$A_{1-2}=90^{\circ}40'55''$				$A_{3-4}=88^{\circ}50'03''$			

Nr ciągu	x_2	$P_1 = \frac{10}{m_x^2}$	$P_2 = \frac{1000}{L}$	v_1	v_2	Nr ciągu	x_4	$P_1 = \frac{10}{m_x^2}$	$P_2 = \frac{1000}{L}$	v_1	v_2
I	1998,03	2,50	0,93	9	11	III	2030,00	1,11	1,06	-20	-19
IV	15	0,20	1,01	- 3	1	V	29,71	0,20	1,03	9	10
III, II	39	0,77	0,50	-27	-25	I, II	64	1,25	0,46	16	17
V, II	10	0,19	0,49	2	4	IV, II	76	0,19	0,48	4	5
		3,66	2,93					2,75	3,03		
$x_2 = 1998,12$				$x_3 = 2029,80$				$2029,81$			
przy wagach P_1				przy wagach P_1				przy wagach P_2			
$1998,14$				$2029,81$				$2029,81$			
przy wagach P_2				przy wagach P_2				przy wagach P_2			

Nr ciągu	y_2	$P_1 = \frac{10}{m_y^2}$	$P_2 = \frac{1000}{L}$	v_1	v_2	Nr ciągu	y_4	$P_1 = \frac{10}{m_y^2}$	$P_2 = \frac{1000}{L}$	v_1	v_2
I	1080,03	0,16	0,93	-12	- 3	III	2159,75	0,20	1,06	21	5
IV	79,74	0,62	1,01	17	26	V	60,07	1,11	1,03	-11	27
III, II	80,08	0,09	0,50	-17	- 8	I, II	59,70	0,08	0,46	26	10
V, II	80,40	0,14	0,49	-49	-40	IV, II	59,41	0,12	0,48	55	39
		1,01	2,93					1,51	3,03		
$y_2 = 1079,91$				$y_4 = 2159,96$				$2159,80$			
przy wagach P_1				przy wagach P_1				przy wagach P_2			
$1080,00$				$2159,80$				$2159,80$			
przy wagach P_2				przy wagach P_2				przy wagach P_2			

Obliczenie średnich błędów m_x i m_y podane jest w tablicy 9.

Tablica 7

WYRÓWNANIE SPOSOBEM RÓWNOWAŻNEJ ZAMIANY

1. Wyrównanie azymutów

Nr ciągów	n	$p = \frac{10}{n}$	$A_{1.2}$	v
I	2	5.0	90°40,50''	+ 6
IV	3	3.3	41'10	- 14
III, V + II	3.5	2.9	40 49	+ 7

$$A_{1.2} = 90^{\circ}40'56''$$

$$A_{3.4} = 88^{\circ}49'59'' + \frac{7 \cdot 1,5}{3,5} = 88^{\circ}50'02''$$

$$A_{3.4}^{III, V} = 88^{\circ}50' + \frac{3,3 \cdot 5'' - 3,3 \cdot 7''}{6,6} = 88^{\circ}49'59''$$

$$n_{III, V + II} = 1,5 + 2 \quad n_{III} = 3, \quad n_V = 3, \quad n_{II} = 2$$

2 Wyrównanie współrzędnych x

Nr ciągów	m^2	$p = \frac{10}{m^2}$	x_2	v
I	4	2.50	1998.03	+ 8
IV	49	0.20	.15	- 4
III, V + II	11.6	0.86	.35	- 24

$$x_2 = 1998.11$$

$$x_4 = 2029.96 - \frac{24 \cdot 7,6}{11,6} = 2029.80$$

$$x_{44}^{III, V} = 2030.00 + \frac{1,11 \cdot 0 - 0,20 \cdot 29}{1,31} = 2029.96$$

$$m_{III, V + II}^2 = 7,6 + 4 \quad m_{III}^2 = 9, \quad m_V^2 = 49, \quad m_{II}^2 = 4$$

3. Wyrównanie współrzędnych y

Nr ciągów	m^2	$p = \frac{10}{m^2}$	y_2	v
I	64	0.16	1080.03	- 15
IV	16	0.62	79.74	+ 14
III, V + II	71.6	0.14	80.35	- 47

$$y_2 = 1079.88$$

$$y_4 = 2160.02 - \frac{47 \cdot 7,6}{71,6} = 2159.97$$

$$y_{44}^{III, V} = 2159.75 + \frac{0,20 \cdot 0 + 1,11 \cdot 32}{1,31} = 2160.02$$

$$m_{III, V + II}^2 = 7,6 + 64 \quad m_{III}^2 = 49, \quad m_V^2 = 9, \quad m_{II}^2 = 64.$$

Obliczenie średnich błędów m_x i m_y podane jest w tablicy 9.

Tablica 3

WYRÓWNANIE SPOSOBEM POPOWA

1. Wyrównanie azymutów

Nr ciagu	$dA_{1,2}$	$dA_{3,4}$	$l = [\alpha]_{\text{przyl.}}^{\text{przyl.}} - [\alpha]_{\text{obs.}}$	$p = \frac{1}{n}$
I	1		0	5.0
II	-1	1	0	5.0
III		1	-5	3.3
IV	1		-20	3.3
V		1	+7	3.3

$$A_{1,2}^{\circ} = 90^{\circ}40'50''$$

$$A_{3,4}^{\circ} = 88^{\circ}50'00''$$

$$13.3 dA_{1,2} - 5.0 dA_{3,4} = 66.0 \quad dA_{1,2} = 5''.7$$

$$-5.0 dA_{1,2} + 11.6 dA_{3,4} = -6.6 \quad dA_{3,4} = 1''.9$$

$$D = 129$$

$$A_{1,2} = 90^{\circ}40'56''$$

$$A_{3,4} = 88^{\circ}50'02''$$

2. Wyrównanie współrzędnych x

Nr ciagu	dx_2	dx_4	$l = [\Delta x]_{\text{przyl.}}^{\text{przyl.}} - [\Delta x]_{\text{obs.}}$	$p = \frac{10}{m^2}$
I	1		2	2.50
II	-1	1	2	2.50
III		1	-32	1.11
IV	1		-10	0.20
V		1	-3	0.20

$$x_2^{\circ} = 1998.05$$

$$x_4^{\circ} = 2029.68$$

$$5.20 dx_2 - 2.50 dx_4 = 2.0 \quad dx_2 = 6 \text{ cm}$$

$$-2.50 dx_2 + 3.81 dx_4 = 31.1 \quad dx_4 = 12 \text{ cm}$$

$$D = 13.56$$

$$x_2 = 1998.11$$

$$x_4 = 2029.80$$

3. Wyrównanie współrzędnych y

Nr ciagu	dy_2	dy_4	$l = [\Delta y]_{\text{przyl.}}^{\text{przyl.}} - [\Delta y]_{\text{obs.}}$	$p = \frac{10}{m^2}$
I	1		0	0.16
II	-1	1	0	0.16
III		1	-5	0.20
IV	1		29	0.62
V		1	-37	1.11

$$y_2^{\circ} = 1080.03$$

$$y_4^{\circ} = 2159.70$$

$$0.94 dy_2 - 0.16 dy_4 = -18.0 \quad dy_2 = -15 \text{ cm}$$

$$-0.16 dy_2 + 1.47 dy_4 = 42.1 \quad dy_4 = 27 \text{ cm}$$

$$D = 1.56$$

$$y_2 = 1079.88$$

$$y_4 = 2159.97$$

Obliczenie średnich błędów m_x i m_y podane jest w tablicy 9.

Tablica 9

WYRÓWNANIE UOGÓLNIONYM SPOSOBEM POPOWA

1. Obliczenie współczynników w równaniach poprawek oraz błędów średnich m_a, m_x, m_y .

Nr ciągu	$\begin{matrix} [\Delta x] \\ [\Delta y] \end{matrix}$	$\begin{matrix} W_x \\ W_y \end{matrix}$	$\begin{matrix} [\Delta x] - W_x \\ [\Delta y] - W_y \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{W_x \rho''} \\ \frac{1}{W_y \rho''} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{([\Delta x] - W_x)} \frac{1}{\rho''} \\ \frac{1}{([\Delta y] - W_y)} \frac{1}{\rho''} \end{matrix}$	$\begin{matrix} k \\ \frac{1}{12} \frac{k(k^2-1)}{\Delta y^2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta x^2 \\ \Delta y^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} n \Delta x^2 \\ \frac{1}{12} \frac{k(k^2-1)}{\Delta y^2} \Delta y^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} n \Delta y^2 \\ \frac{1}{12} \frac{k(k^2-1)}{\Delta x^2} \Delta x^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_x^2 \\ m_y^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} m_x \\ m_y \end{matrix}$	m_a	Nr ciągu
I	$\begin{matrix} -2 \\ 1075 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3 \\ 810 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 265 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0.39 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0.13 \end{matrix}$	2	$\begin{matrix} 0 \\ 29 \cdot 10^4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 14 \cdot 10^4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 58 \cdot 10^4 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \cdot 10^{-4} \\ 58 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix}$	14''	I
II	$\begin{matrix} 32 \\ 1080 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 20 \\ 795 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 12 \\ 285 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0.01 \\ 0.39 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0.01 \\ 0.14 \end{matrix}$	2	$\begin{matrix} 0 \\ 29 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 14 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 58 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 58 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix}$	14	II
III	$\begin{matrix} 23 \\ 940 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 12 \\ 463 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 11 \\ 477 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0.01 \\ 0.22 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0.01 \\ 0.23 \end{matrix}$	3	$\begin{matrix} 0 \\ 22 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 44 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 44 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 11 \\ 44 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}$	17	III
IV	$\begin{matrix} 948 \\ 285 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 465 \\ 157 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 483 \\ 128 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0.22 \\ 0.08 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0.23 \\ 0.06 \end{matrix}$	3	$\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 44 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 44 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 45 \\ 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix}$	17	IV
V	$\begin{matrix} -966 \\ 78 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -486 \\ 57 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -480 \\ 21 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0.24 \\ 0.03 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0.23 \\ 0.01 \end{matrix}$	3	$\begin{matrix} 23 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 46 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 46 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 46 \\ 11 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix}$	17	V

Współczynniki wyrażono w cm/l'', zaś błędy średnie m_x i m_y — w cm.

2. Ułożenie równań poprawek

Oznaczenie równania	Punkt węzłowy 2		Punkt węzłowy 4		l_a
	$dA_{1,2}$	dx_2	$dA_{3,4}$	dx_4	
a_I	1				0
a_{II}	—	1	1		0
a_{III}			—1		5"
a_{IV}	—	1			20"
a_V			—1		— 7"
	$dA_{1,2}$	dx_2	$dA_{3,4}$	dx_4	l'_x
x_I	0.39	1			0
x_{II}	0.14	—1	0.39	1	0
x_{III}			0.23	—1	30
x_{IV}	0.06	—1			8
x_V			0.01	—1	4
	$dA_{1,2}$	dx_2	$dA_{3,4}$	dx_4	l'_y
y_I	0				0
y_{II}	—0.01	1	—0.01	1	0
y_{III}		—1	—0.01	—1	5
y_{IV}	—0.23	—1			—22
y_V			0.23	—1	38
	$dA_{1,2}$	dx_2	$dA_{3,4}$	dx_4	$+l_a W_y$
x_I					0
x_{II}					0
x_{III}					1
x_{IV}					2
x_V					0
	$dA_{1,2}$	dx_2	$dA_{3,4}$	dx_4	$-l_a W_x$
y_I					0
y_{II}					0
y_{III}					0
y_{IV}					—4
y_V					—2
	$dA_{1,2}$	dx_2	$dA_{3,4}$	dx_4	l_x
x_I					0
x_{II}					0
x_{III}					31
x_{IV}					10
x_V					4
	$dA_{1,2}$	dx_2	$dA_{3,4}$	dx_4	l_y
y_I					0
y_{II}					0
y_{III}					5
y_{IV}					—26
y_V					36

Przybliżone wartości elementów węzłowych:

$$A_{1,2}^{\circ} = 90^{\circ}40'50'' \quad x_2^{\circ} = 1998.05 \quad y_2^{\circ} = 1080.03$$

$$A_{3,4}^{\circ} = 80^{\circ}50'00'' \quad x_4^{\circ} = 2029.68 \quad y_4^{\circ} = 2159.70$$

U w a g a : W wyrównaniu wykorzystano obliczenie sum przyrostów współrzędnych przeprowadzone w tablicy 1.

3. Zrównoważenie równań poprawek

Tablica 10

Oznaczn.	m	$dA_{1,2}$	dx_2	dy_2	$dA_{3,4}$	dx_4	dy_4	$1 \cdot 10^{-1}$	s	v/m
α_I	14''	0.07						0	0.07	-1.2
α_{II}	14	-0.07			0.07			0	0	-0.8
α_{III}	17				-0.06			0.03	-0.03	2.1
α_{IV}	17	-0.06						0.12	0.06	2.3
α_V	17				-0.06			-0.04	-0.10	1.4
x_I	2	0.20	0.50					0	0.70	0
x_{II}	2	0.07	-0.50		0.20	0.50		0	0.27	-0.1
x_{III}	3				0.08	-0.33		1.03	0.78	1.0
x_{IV}	7	0.01	-0.14					0.14	0.01	0.2
x_V	7				0	-0.14		0.06	-0.08	-2.4
y_I	8	0		0.12				0	0.12	-1.4
y_{II}	8	0		-0.12	0		0.12	0	0	4.0
y_{III}	7				0		-0.14	0.07	-0.07	-2.4
y_{IV}	4	-0.06		-0.25				-0.65	-0.96	-2.6
y_V	3				0.08		-0.33	1.20	0.95	2.4

4. Ułożenie i rozwiązanie równań normalnych

$dA_{1,2}$	dx_2	dy_2	$dA_{3,4}$	dx_4	dy_4	l	s
620	636	150	91	350	0	332	2179
	5196	0	1000	-2500	0	-196	2136
		913	0	0	-144	1625	2544
			649	736	-264	1790	2002
				3785	0	-3483	-1112
					1429	-4058	-3037
24.9	25.5	6.0	3.7	14.1	0	13.3	87.5
	67.4	-2.3	-16.2	-42.4	0	-7.9	-1.4
		29.5	-2.0	-6.2	-4.9	51.8	68.2
			19.2	-0.8	-14.3	89.4	93.5
				41.8	-1.0	-86.4	-45.6
					34.6	-75.5	40.9

-18 +7 -12 -29 +21 +22

niewiadomą, w cm i sek.

5. Obliczenie średnich błędów niewiadomych (z odwrotności pierwiastka krakowianowego)

$dA_{1,2}$	dx_2	dy_2	$dA_{3,4}$	dx_4	dy_4	s
4.02						4.02
-1.52	1.48					-0.04
-0.94	0.12	3.39				2.57
-2.16	1.26	0.35	5.21			4.67
-3.08	1.54	0.51	0.10	2.39		1.47
-1.12	0.58	0.64	2.16	0.07	2.89	5.23

5.9 2.6 3.5 5.6 2.4 2.9

15 6.5 8.8 14 6.0 7.2

$$\frac{m_i}{m_o}$$

 m_i — błędy średnie, w cm i sek.

Wyrównane wartości elementów węzłowych:

$$A_{1,2} = 90^\circ 40' 32'' \quad x_2 = 1998.12 \quad y_2 = 1079.91$$

$$A_{3,4} = 88^\circ 49' 31'' \quad x_4 = 2029.90 \quad y_4 = 2159.88$$

$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = 57$$

$$[ll] - [LL] = 297 - 241 = 56$$

$$m_o = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{vv}{mm} \right]}{3(c-w)}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{57}{9}} = \pm 2.5$$

Tablica 11

Obliczenie fikcyjnych spostrzeżeń i ułożenie równań poprawek fikcyjnych spostrzeżeń

[illegible]

Równania poprawek

m	dx_2	dy_2	dx_1	dy_1	dx_4	dy_4	dx_3	dy_3	l
15"	-190								0
15"	-190	-5	380	5	-190	5			0
15"	570		-380	-5	-210	3	400	-8	0
15"	-190	5			620	-13	-400	8	0
15"					-220	5			-70
15"									75
15"	440	-195	-380	-5					-52
15"	-60	200							72
15"					417	207	-400	8	-81
15"					-17	-215			73
0.07		1.00							0
0.05	-0.01	1.00	0.01	-1.00					0
0.07	-0.03	-1.00			0.03	1.00			0
0.05					0.02	1.00	-0.02	-1.00	0
0.07					-0.02	-1.00			0.05
0.07	-0.96	-0.29							0.01
0.07					1.00	-0.07			-0.01

Wyrównane wartości elementów węzłowych

$$x_2 = 1998.05 + 0.070 = 1998.12$$

$$y_2 = 1080.03 - 0.077 = 1079.95$$

$$x_4 = 2029.68 + 0.198 = 2029.88$$

$$y_4 = 2159.70 + 0.126 = 2159.83$$

$$A_{(12)} = 90^\circ 40' 50'' - 23'' = 90^\circ 40' 27''$$

$$A_{(34)} = 88^\circ 50' 00'' - 34'' = 88^\circ 49' 26''$$

Zrównoważone równania poprawek

Tablica 12

dx_2	dy_2	dx_1	dy_1	dx_4	dy_4	dx_3	dy_3	l	s	$\frac{v}{m}$
-12.6								0	-12.6	-0.9
-12.6	-0.3	25.3	0.3					0	12.7	-0.7
38.0		-25.3	-0.3	-12.6	0.3	26.7	-0.5	0	0.1	0.0
-12.6	0.3			-14.0	0.2	-26.7	0.5	0	0.1	-0.7
				41.3	-0.9			-4.7	9.5	0.4
				-14.7	0.3			5.0	-9.4	2.1
29.4	-13.0	-25.3	-0.3					-3.5	-12.7	-0.6
-4.0	13.3							4.8	14.1	3.5
				27.8	13.8	-26.7	0.5	-5.4	10.0	-1.1
				-1.1	-14.3			4.9	-10.5	2.9
	14.3							0	14.3	-1.1
-0.2	20.0	0.2	-20.0					0	0	0.0
-0.4	-14.3			0.4	14.3			0	0	2.9
				0.4	20.0	-0.4	-20.0	0	0	0.0
				-0.3	-14.3			0.8	-13.8	-1.1
-13.7	-4.2							0.2	-17.7	-0.4
				14.3	-1.0			-0.2	13.1	2.5

Równania normalne

2988.5	-376.1	-2024.0	-20.0	-302.6	3.2	-336.4	6.3	-124.8	-186.0
1172.7	325.3	-396.2	-9.9	-204.4	8.0	-0.2	108.5	627.7	
	1920.3	18.8	318.8	-7.6			88.6	640.1	
		400.3	3.8	-0.1			1.0	7.6	
			3255.5	354.9	-2218.9	33.6	-426.2	1068.9	
				1205.9	-347.1	-393.7	-150.1	431.1	
					2138.8	-32.1	269.7	-518.0	
					400.8	-5.0	9.7		
54.7	-6.9	-37.0	-0.4	-5.5	0.1	-6.2	0.1	-2.3	-3.4
	33.5	2.1	-11.9	-1.4	-6.1	-1.0	0.0	2.8	18.0
		23.4	1.2	5.1	0.4	-9.7	0.2	-0.1	20.4
			16.0	-1.3	-4.6	-0.2	0.0	2.1	12.2
				56.5	6.0	-39.0	0.6	-7.6	16.4
					33.3	-3.5	-11.9	-2.3	15.6
						21.7	-2.2	-2.2	17.4
							15.9	-2.0	13.8

$$0.070 \quad -0.077 \quad 0.009 \quad -0.078 \quad 0.198 \quad 0.126 \quad 0.114 \quad 0.126 \text{ niewiadome}$$

$$dA_{(1-2)} = -23''$$

$$dA_{(3-4)} = -34''$$

$$\left[\frac{vv}{mm} \right] = 45.8$$

$$[ll] - [LL] = 136.3 - 89.4 = 46.9$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{45.8}{9}} = \pm 2.3$$

183	
38	298
286	-27
11	224
-7	15
6	83
170	44
24	68

177	
-32	300
313	48
13	231

$$0.0383 \quad 0.0392$$

$$0.0361 \quad 0.0382$$

$$\sqrt{(a \ p \ a)^{-1}}$$

$$0.09 \quad 0.10$$

$$0.08 \quad 0.09$$

$$m_x, m_y$$

Błędy azymutów oblicza się również w sposób podobny jak w metodzie najmniejszych kwadratów.

Tablica 13

ZESTAWIENIE WYNIKÓW WYRÓWNAŃ SIECI PRZEDSTAWIONEJ NA RYS. 7

Średni błąd niewiadomej	0,06		0,09		15''				0,06		0,08		15''				γ ₀ '	γ ₀ ''
	x ₂	η m	y ₂	η m	A' _(1,2)	η m	A'' _(1,2)	γ m	x ₁	η m	y ₁	η m	A' _(3,4)	(η') m	A'' _(3,4)	(η'') m		
Niewiadome z metody:																		
Metoda najmniejszych kwadratów	1998,14		1079,91		90°40'30''		90°40'30''	2029,91		2159,88		88°49'33''			88°49'33''			
Sposób węzłowy przy $P = \frac{1}{L}$	12 0,3		91 0,0		55	1,7	37	80	1,8	96	1,0	50 03	2,0		52	1,3	1,4 1,0	
Sposób węzłowy przy $P = \frac{1}{m^2}$	14 0,0		80,00	1,0	55	1,7	33	81	1,7	80	1,0	03	2,0		51	1,2	1,4 1,0	
Sposób równoważnej zamiany	11 0,5		79,88	0,3	56	1,7	40	80	1,8	97	1,1	02	1,9		48	1,0	1,4 1,0	
Sposób Popowa	11 0,5		88	0,3	56	1,7	40	80	1,8	97	1,1	02	1,9		48	1,0	1,4 1,0	
Sposób uogólniony Popowa	12 0,3		91	0,0	32	0,1		90	0,2	88	0,0	49 31	0,1				0,2	
Sposób fikcyjnych spostrzeżeń	12 0,3		95	0,4	27	0,2		88	0,5	83	0,6	26	0,5				0,4	

jące z rachunku na dwu ciągach przyjmowano równe sumom kwadratów odpowiednich błędów średnich.

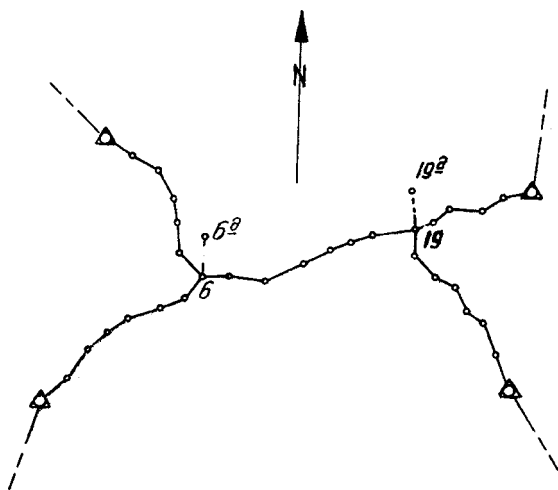
$$\text{np. } m_{x_{V,II}}^2 = m_{x_V}^2 + m_{x_{II}}^2$$

Oczywiście poprawniejsze, choć nierównie bardziej skomplikowane, byłoby obliczenie w tym przypadku wartości $m_{x_{V,II}}$ bezpośrednio ze wzoru odnoszącego się do poligonu dowolnego kształtu.

Wyniki wyrównań sieci przykładowej podane są w tablicy 13.

Azymuty węzłowe A'' służące do obliczenia odpowiednich $\left(\frac{\eta}{m}\right)''$ obliczono z wyrównanych przyrostów boku azymutu węzłowego. Przyrosty te uzyskano z przybliżonego wyrównania ciągów między punktami stałymi i węzłowymi przyjętymi za stałe. Odchyłki zamknięcia sum przyrostów na ciągach rozrzucono na poszczególne przyrosty proporcjonalnie do długości odpowiednich boków poligonowych.

Podobne obliczenia przeprowadzono w oparciu o materiały polowe dotyczące sieci poligonowych o kształcie przedstawionym na rys. 8, 9, 10, 11.



Rys. 8

Sieć przedstawiona na rys. 8 zaczerpnięta została z publikacji „Городская Полигонометрия, руководство по вычислительным работам” str. 115. Zgodnie z materiałem źródłowym przyjęto: $m_0 = 8,5$ $m_d = \frac{d}{17000}$.

Wyniki obliczeń zamieszczono w tablicy 14.

Sieć przedstawiona na rys. 9 przyjęta została z pomiarów dokonanych przez Warszawskie OPM i charakteryzuje się dokładnościami typowymi dla poligonizacji precyzyjnej I klasy: $m_0 = 7,5$ $m_d = \frac{d}{20000}$. Wyniki obliczeń zamieszczono w tablicy 15.

Sieci przedstawione na rys. 10 i 11 przyjęte zostały z pomiarów dokonanych przez Kieleckie OPM i charakteryzują się dokładnościami typowymi dla poligonizacji precyzyjnej II klasy: $m_0 = 12^{\text{cc}}$ $m_d = \frac{d}{12\,000}$. Wyniki obliczeń przedstawiono w tablicach: 16 (sieć z rys. 10) i 17 (sieć z rys. 11).

Przy wyciągnięciu wniosków opieramy się na tablicach 18 i 19. Pierwsza z tych tablic zawiera wartości η'_0 , jak również maksymalne wartości $\frac{\eta}{m}$ odnoszące się do czterech sieci (patrz tablice 14, 15, 16, 17). W tablicy 18 podano również średnie wartości η'_0 dla tych czterech sieci. Następna tablica, tj. 19 zawiera średnie wartości η'_0 i η''_0 uzyskane w wyniku wyrównania 3 sieci. Dla sieci przedstawionej na rys. 8 obliczenie wartości η''_0 było niemożliwe, ze względu na to, że azymuty węzłowe tej sieci nie pokrywają się z kierunkami boków poligonowych i na skutek tego nie zmieniają się w efekcie wyrównania przyrostów współrzędnych na ciągach.

Dla sposobów grupy drugiej nie obliczono wartości η''_0 , uważając, że uzyskane w wyniku wyrównania tymi sposobami azymuty węzłowe nie powinny podlegać zmianom w dalszych, mniej konsekwentnych pojęciowo obliczeniach.

Duża pracochłonność przeprowadzanych obliczeń uniemożliwiła zgromadzenie większego materiału statystycznego, co skłania do zachowania pewnej ostrożności w przyjmowaniu wniosków. Jednak wyniki wyrównanych 4 sieci układają się w sposób pozwalający na wyciągnięcie jednoznacznych wniosków.

Z obydwu tablic widać, że różnice między wynikami wyrównania elementów węzłowych w sieciach poligonowych metodą najmniejszych kwadratów i każdym ze sposobów przybliżonych są rzędu wartości błędu średniego, a więc w większości przypadków praktycznie zaniedbywalne. Nasuwa się stąd wniosek o zbędności stosowania metody najmniejszych kwadratów do wyrównania sieci nie służących celom wymagającym specjalnie wysokiej dokładności.

Wielkości $\eta'_{0\text{sr.}}$ i $\left(\frac{\eta}{m}\right)_{\text{max}}$, podane w tablicy 18 i uwzględniające wartości azymutów węzłowych obliczone z wyrównania kąтового, wskazują na wyraźną przewagę sposobów grupy drugiej nad sposobami grupy pierwszej. Nieco inny obraz otrzymamy biorąc pod uwagę wielkości η''_0 (uzyskane z uwzględnieniem azymutów węzłowych obliczonych ze współrzędnych) i odpowiednie wielkości η'_0 zamieszczone w tablicy 19. Z tablicy tej wynika, że przeprowadzenie wyrównania przyrostów współrzędnych na ogół poprawia azymuty węzłowe, uzyskane z wyrównania kątów sposobem pierwszej grupy. Należy jednak podkreślić, że do wyrównania przyrostów na ciągach stosuje się azymuty węzłowe uzyskane z wyrównania ką-

ZESTAWIENIE WYNIKÓW WYRÓWNAŃ SIECI PRZEDSTAWIONEJ NA RYS. 9

Tablica 15

Średni błąd niewiadomej		0.030		0.057		8 ^{cc}					
		x_{22}	$\frac{\gamma_1}{m}$	y_{22}	$\frac{\gamma_1}{m}$	$A'_{(21,22)}$	$\left(\frac{\gamma_1'}{m}\right)$	$A''_{(21,22)}$	$\left(\frac{\gamma_1''}{m}\right)$	γ_0'	γ_0''
Niewiadome z metody :											
Metoda najmniejszych kwadratów		20 250.637		12 485.973		196893 ^{93cc}		196893 ^{93cc}			
Sposób węzłowy przy $P = \frac{1}{L}$		668	1.03	977	0.07	83	1.25	92	0.12	0.93	0.60
Sposób węzłowy przy $P = \frac{1}{m_2}$		618	0.63	970	0.05	84	1.12	93	0.00	0.74	0.36
Sposób Popowa		618	0.63	970	0.05	84	1.12	93	0.00	0.74	0.36
Sposób uogólniony Popowa		640	0.10	967	0.11	92	0.12			0.11	
Sposób fikcyjnych spostrzeżeń		648	0.37	975	0.04	92	0.12			0.22	

ZESTAWIENIE WYNIKÓW WYRÓWNAŃ SIECI PRZEDSTAWIONEJ NA RYS. 10

Tablica 16

Średni błąd niewiadomej		0.190		0.190		46 ^{cc}					
		x_{16}	$\frac{\gamma_1}{m}$	y_{16}	$\frac{\gamma_1}{m}$	$A'_{(16,17)}$	$\left(\frac{\gamma_1'}{m}\right)$	$A''_{(16,17)}$	$\left(\frac{\gamma_1''}{m}\right)$	γ_{10}'	γ_{10}''
Metoda najmniejszych kwadratów		93.370		425.477		367 ⁹ 10 ^c 26 ^{cc}		367 ⁹ 10 ^c 26 ^{cc}			
Sposób węzłowy przy $P = \frac{1}{L}$		361	0.05	529	0.27	29	0.07	09	0.37	0.17	0.26
Sposób węzłowy przy $P = \frac{1}{m^2}$		380	0.05	467	0.05	29	0.07	13	0.28	0.06	0.16
Sposób Popowa		380	0.05	467	0.05	29	0.07	13	0.28	0.06	0.16
Sposób uogólniony Popowa		380	0.05	470	0.04	24	0.04			0.06	
Sposób fikcyjnych spostrzeżeń		335	0.18	567	0.47	29	0.07			0.29	

Tablica 17

ZESTAWIENIE WYNIKÓW WYRÓWNAŃ SIECI PRZEDSTAWIONEJ NA RYS. 11

Średni błąd niewiadomej	0,120		0,110		29 ^{cc}				0,140		0,110		33 ^{cc}				γ'_0	γ''_0
	x_{2484}	$\frac{\gamma}{m}$	y_{2484}	$\frac{\gamma}{m}$	$A'_{(2484+2483)}$	$\left(\frac{\gamma}{m}\right)'$	$A''_{(2484+2483)}$	$\left(\frac{\gamma}{m}\right)''$	x_{4241}	$\frac{\gamma}{m}$	y_{4241}	$\frac{\gamma}{m}$	$A'_{(4241+4242)}$	$\left(\frac{\gamma}{m}\right)'$	$A''_{(4241+4242)}$	$\left(\frac{\gamma}{m}\right)''$		
Niewiadome z metody:																		
Metoda najmniejszych kwadratów	637,712		182,973		77843 ^{cc} 97 ^{cc}		43,97		500,101		458,506		211813 ^{cc} 21 ^{cc}			13,21		
Sposób wężłowy przy $P = \frac{1}{L}$	750 0,32		918 0,50		44 03	0 21	44,13	0 67	055 0,33		509 0,03		12 98	0 70	13,15	0,18	0,41 0,40	
Sposób wężłowy przy $P = \frac{1}{m^2}$	728 0,13		969 0,04		44 03	0 21	44,03	0 21	075 0,19		482 0,22		12 98	0 70	13,11	0 30	0 33 0,20	
Sposób równoważnej zamiany	721 0,08		969 0,04		44 08	0 38	43,98	0 03	095 0,04		476 0,27		12 98	0 70	13,08	0 39	0 35 0,20	
Sposób Popowa	722 0,08		969 0,04		44 08	0 38	43,98	0 03	096 0,04		477 0,27		12 99	0 69	13,08	0 39	0 34 0,20	
Sposób uogólniony Popowa	752 0,33		975 0,02		44 02	0 17			093 0,06		531 0,23		13 27	0 18			0 20	
Sposób fikcyjnych spoprzeżeń	716 0,03		926 0,47		43 93	0 14			100 0,01		503 0,03		13 14	0 21			0 22	

Tablica 18

OGÓLNE ZESTAWIENIE WYNIKÓW WYRÓWNANIA SIECI 2, 3, 4, 5

γ_{10}' dla sieci nr.	2	3	4	5	γ_{10}' śr.	$\left(\frac{\eta}{m}\right)_{max}$
Sposób wyrównania:						
Węzłowy przy $P = \frac{1}{L}$	0,66	0,93	0,17	0,41	0,54	1,30
Węzłowy przy $P = \frac{1}{m^2}$	0,64	0,74	0,06	0,33	0,44	1,10
Równoważnej zamiany	0,81	0,74	0,06	0,35	0,49	1,32
Popowa	0,81	0,74	0,06	0,34	0,49	1,32
Uogólniony Popowa	0,45	0,11	0,05	0,20	0,20	0,64
Fikcyjnych spostrzeżeń	0,33	0,22	0,29	0,22	0,26	0,48

Tablica 19

ZESTAWIENIE ŚREDNICH WARTOŚCI γ_{10}' , γ_{10}''
(dla 3 sieci)

Sposób wyrównania	γ_{10}' śr.	γ_{10}'' śr.
Węzłowy przy $P = \frac{1}{L}$	0,50	0,41
Węzłowy przy $P = \frac{1}{m^2}$	0,37	0,24
Równoważnej zamiany	0,38	0,24
Popowa	0,38	0,24
Uogólniony Popowa	0,12	
Fikcyjnych spostrzeżeń	0,24	

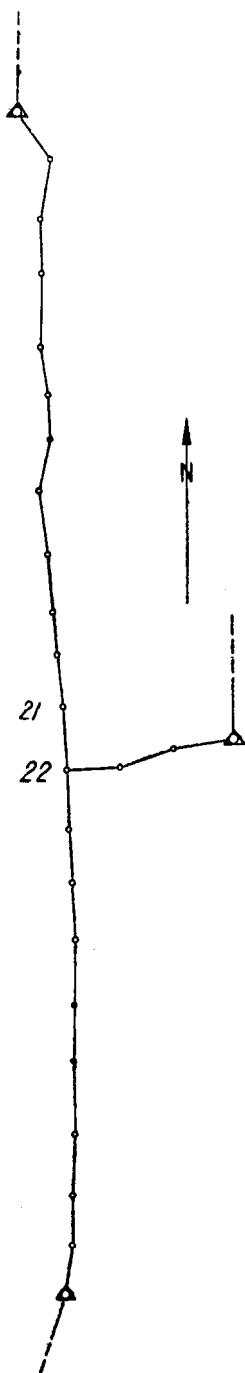
tów, a więc bardziej miarodajne w ocenie sposobów przybliżonych jest porównywanie wartości γ_{10}' .

W związku z tym można zasugerować stosowanie sposobów pierwszej grupy do wyrównania sieci poligonowych o mniejszej dokładności, zaś sposobów drugiej grupy do wyrównania sieci poligonowych o większej dokładności. Stosowanie drugiej grupy również do wyrównania sieci mniej dokładnych nie jest wskazane ze względu na nieco większą ich pracochłonność w stosunku do pracochłonności sposobów grupy pierwszej.

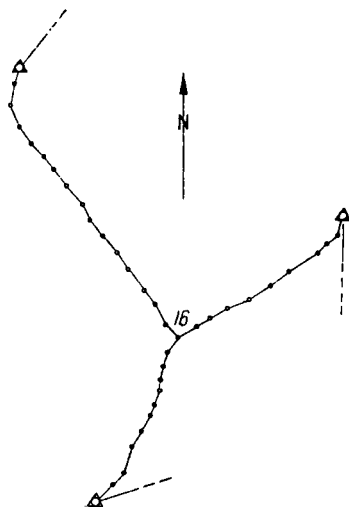
4..

Na zakończenie podamy omówienie wyników wyrównania sieci poligonowej odbiegającej swym charakterem od rozpatrywanych dotychczas (możliwej do wyrównania tylko metodą najmniejszych kwadratów,

względnie sposobami przybliżonymi grupy drugiej). Jest to właściwie ciąg poligonowy (patrz rys. 12) nawiązany z jednej strony do punktów I, II współrzędnymi i azymutalnie, oraz do punktu VII tylko współrzędnymi, posiadający dodatkowo zmierzone kąty na punktach 3, 5, 16, 28 między kierunkami boków poligonowych a — odpowiednio — kierunkami na punkty triangulacyjne III, IV, V, VI.



Rys. 9



Rys. 10

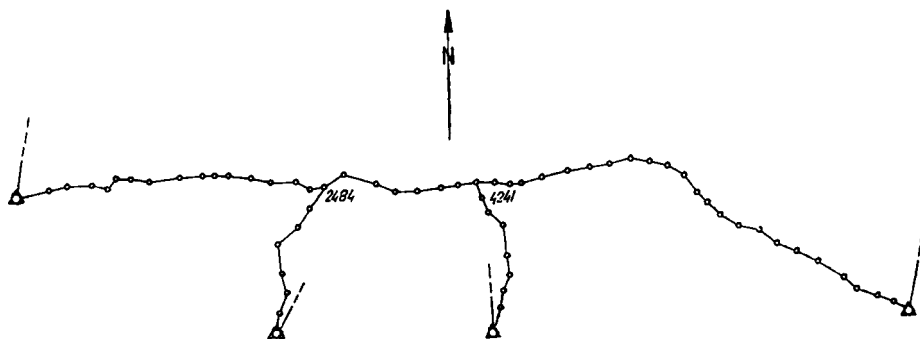
Ciąg ten został wyrównany metodą najmniejszych kwadratów z uwzględnieniem wspomnianych nawiązań bocznych, przy uzmiennieniu wszystkich punktów nawiązujących. Wyrównanie to zostało wykonane przez PPG dla potrzeb badawczych IGiK-u. W wyrównaniu przyjęto $m_d = 0,024$; $m_o = 7,5^{\circ}$.

Ponieważ w wyniku wyrównania uzyskano bardzo małe zmiany współrzędnych punktów triangulacyjnych, przy dalszych badaniach zaniechano ich uzmienniania. Wyniki tego wyrównania możemy uznać za najbardziej właściwe dla danej konstrukcji pomiarowej, ponieważ przeprowadzone było metodą najmniejszych kwadratów z wykorzystaniem całkowitego materiału obserwacyjnego oraz uwzględniało wpływ błędów współrzędnych wszystkich siedmiu punktów nawiązujących. Dla oceny wartości współrzędnych obliczono elementy elips średniego błędu wyznaczenia punktów poligonowych, z których dokonane zostały nawiązania boczne (rys. 13). Następnie dokonano wyrównania ciągu metodą naj-

mniejszych kwadratów bez uwzględnienia nawiązań bocznych. Dla uzyskania oceny dokładności obliczono również przy tym wyrównaniu elementy elips średniego błędu wyznaczenia punktów 3, 5, 16, 28 (rys. 14). Porównanie elips średniego błędu wyznaczenia tych samych punktów, przy obu wyrównaniach, wyraźnie potwierdza wyższość wyrównania z uwzględnieniem wpływu nawiązań bocznych.

W świetle wymagań obecnie obowiązującej „Tymczasowej Instrukcji o wykonywaniu poligonizacji precyzyjnej I i II klasy, 1956”, omawiany ciąg — w wypadku wyrównania go z uwzględnieniem nawiązań bocznych — możnaby zaliczyć do klasy II, natomiast bez uwzględnienia nawiązań bocznych zatracą on w ogóle cechy poligonizacji precyzyjnej.

Jeśli na rys. 15 przyjąć punkty na ciągu za uzyskane z wyrównania metodą najmniejszych kwadratów z uwzględnieniem nawiązań bocznych, to odpowiednio — punkty uzyskane z wyrównania metodą najmniejszych kwadratów bez uwzględnienia nawiązań bocznych znajdują się na końcach grubych kresek — wektorów różnic wyznaczenia położe-



Rys. 11

nia. Długości wektorów różnic położenia nieznacznie przekraczają wartości błędów średnich wyznaczenia przy wyrównaniu metodą najmniejszych kwadratów bez uwzględnienia nawiązań bocznych (por. rys. 14, 15). Maksymalna różnica w położeniu odpowiednich punktów wyniosła 18 cm.

W dalszym ciągu niniejszego badania wyznaczono współrzędne punktów 3, 5, 16, 28 przy użyciu sposobu uogólnionego Popowa i fikcyjnych spostrzeżeń z wykorzystaniem nawiązań bocznych. Wyniki badań zestawiono w tablicy 20.

Przyjmując uzyskane z wyrównania sposobem fikcyjnych spostrzeżeń współrzędne punktów 3, 5, 16, 28 oraz azymuty 3-III, 5-IV, 16-V, 28-VI za bezbłędne, wyrównano w sposób przybliżony pięć ciągów zawartych między punktami 1, 3, 5, 16, 28, VII. Różnice między położeniami punktów wyznaczonych metodą najmniejszych kwadratów z uwzględnieniem nawiązań bocznych, a położeniami uzyskanymi z wyżej wspomnianego wyrównania przybliżonego z uwzględnieniem nawiązań bocznych,

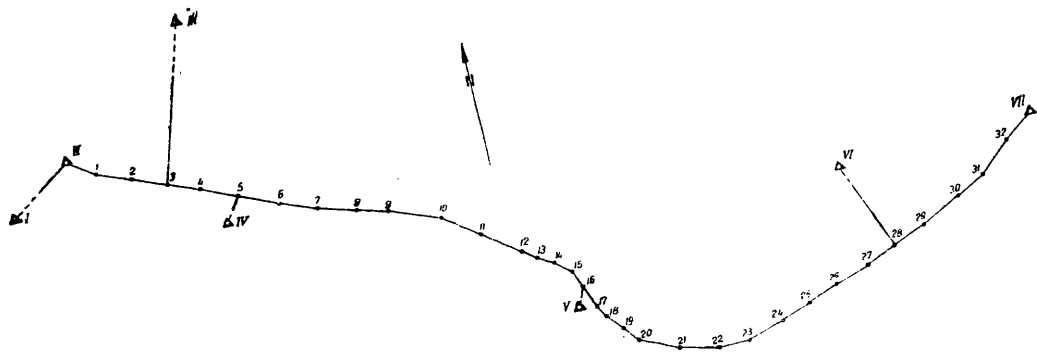
T a b l i c a 20

ZESTAWIENIE WYNIKÓW WYRÓWNIANIA SIECI PRZEDSTAWIONEJ NA RYS. 12

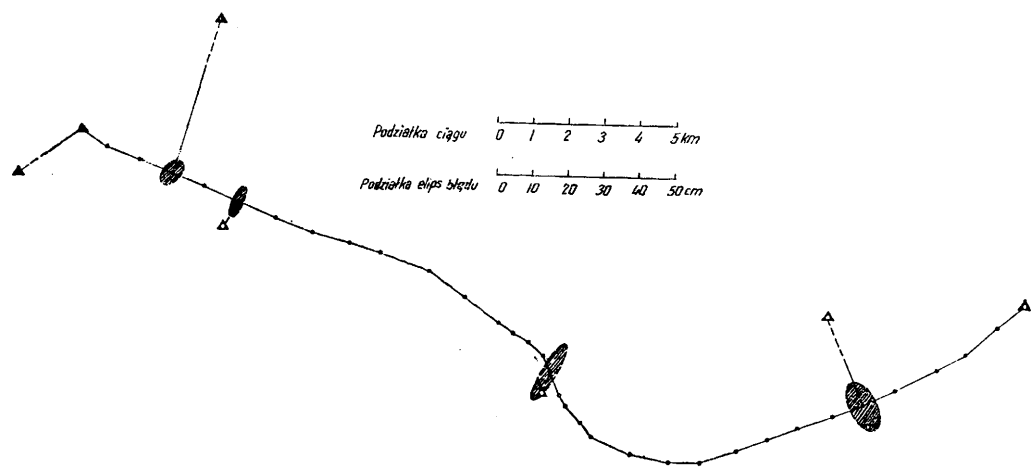
Błąd średni niewiadomej		0.050		0.039		6. ^{cc} 5		0.060		0.088		
Niewiadome z metody:	x_3	$\frac{\gamma_1}{m}$		y_3	$\frac{\gamma_1}{m}$		$A_{(3\text{ III})}$	$\frac{\gamma_1}{m}$		y_5	$\frac{\gamma_1}{m}$	
Metoda najmniejszych kwadratów z uwzgl. nawiązań bocznych	152.839			254.107			16 ^g 28 ^c 74 ^{cc}			123.723		
Metoda najmniejszych kwadratów bez uwzgl. nawiązań bocznych	883	0.68		079	0.72		79	0.77	473	0.75	674	1.29
Sposób uogólniony Popowa z uwzgl. nawiązań bocznych	873	0.68		119	0.31		73	0.15	459	0.68	748	0.66
Sposób fikcyjnych spostrzeżeń z uwzgl. nawiązań bocznych	864	0.50		113	0.41		72	0.31	438	0.33	747	0.66

Ciąg dalszy tabl. 20

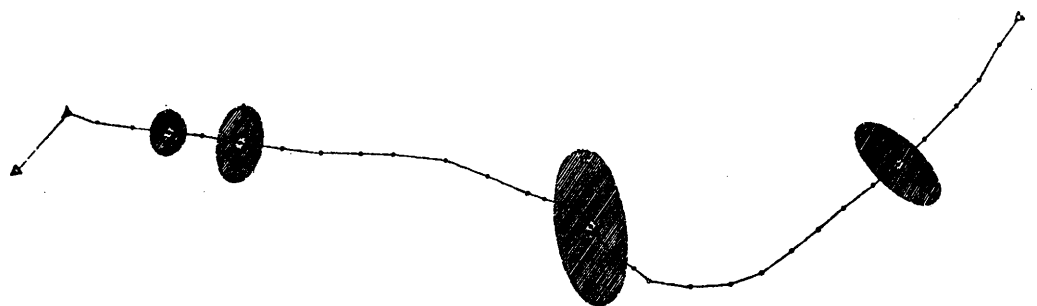
9. 0 ^{cc}		0.091		0.056		10. ^{cc} 6		0.068		0.049		7. 4 ^{cc}		$\left[\frac{\gamma_1 \gamma_1}{mm} \right]$	$\gamma_{10} = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{\gamma_1 \gamma_1}{mm} \right]}{12}}$
$A_{(IV.5)}$	$\frac{\gamma_1}{m}$	x_{16}	$\frac{\gamma_1}{m}$	y_{16}	$\frac{\gamma_1}{m}$	$A_{(V.16)}$	$\frac{\gamma_1}{m}$	x_{28}	$\frac{\gamma_1}{m}$	y_{28}	$\frac{\gamma_1}{m}$	$A_{(28.VI)}$	$\frac{\gamma_1}{m}$		
34 ^g 54 ^c 54 ^{cc}		939.674		129.209		33 ^g 50 ^c 58 ^{cc}		328.207		954.191		371 ^g 76 ^c 48 ^{cc}			
53 95	6.55	788	1.25	097	2.00	49 17	13.30	226	0.28	095	1.97	70	2.98	242.31	4.50
54 54	0.00	687	0.14	249	0.71	50 85	2.55	212	0.07	212	0.43	43	0.68	9.16	0.88
54 65	1.22	646	0.31	228	0.34	50 88	2.83	196	0.16	177	0.29	50	0.27	10.91	0.96



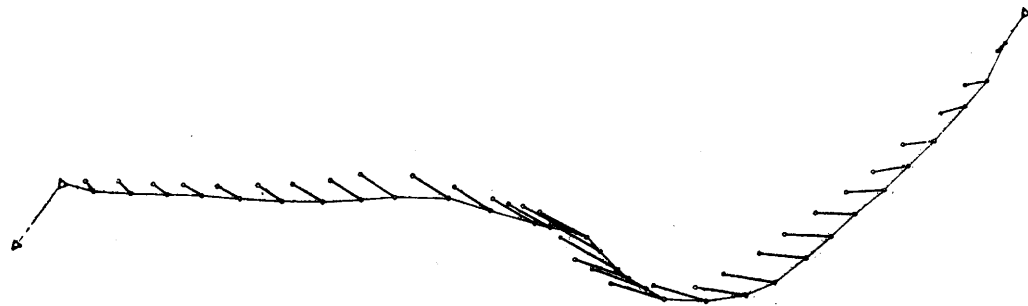
Rys. 12



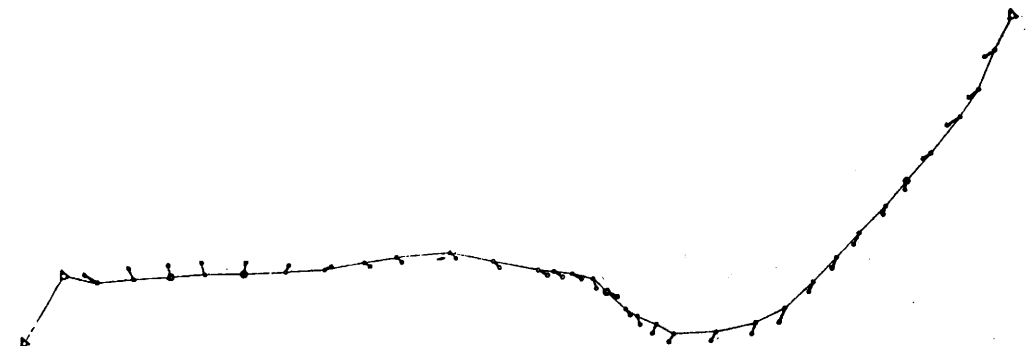
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

charakteryzują wektory na rys. 16. Porównanie rysunków 15 i 16 pozwala wysnuć wniosek, że lepiej jest uwzględnić nawiązania boczne w sposób przybliżony (przy wykorzystaniu sposobu uogólnionego Popowa, względnie sposobu fikcyjnych spostrzeżeń), aniżeli stosować wyrównania metodą najmniejszych kwadratów bez uwzględnienia nawiązań bocznych. Maksymalna długość wektora różnicy położenia wynosi 4 cm (rys. 16).

Omówiony powyżej przykład rzuca dodatkowe światło na zagadnienie stosowania przybliżonych sposobów wyrównania również w przypadkach sieci poligonowych o szczególnym kształcie.

LITERATURA

- [1] *Domosiński T.* Łączne wyrównanie dowolnego układu węzłów poligonizacji precyzyjnej. *Przegląd Geodezyjny* (9) 1957.
- [2] *Gaździcki J., Janusz W.* Jednoczesne wyrównanie azymutów i współrzędnych węzłowych w siatkach poligonowych. *Prace IGiK*, tom V, zeszyt 3 (12).
- [3] *Gaździcki J.* Wpływ nawiązań kątowych na zmniejszenie błędów podłużnych punktów typowego ciągu poligonowego. *Prace IGiK*, tom IV, zeszyt 1.
- [4] *Geodezja w gorodskom stroitelstwie.* Leningrad, Moskwa 1950.
- [5] *Gorodskaja poligonometria.* Moskwa 1952.
- [6] *Hausbrandt S.* Rachunki Geodezyjne. PPWK 1953.
- [7] *Kuzin N. A., Lebediew N. N.* Praktičeskoje rukowodstwo po gorodskoj i inženiernoj poligonometrii. *Gieodiezizdat*, 1954.
- [8] *Popow B. N.* Urawnawiesziwanije poligonow. *Gieodiezizdat* 1954.

ЕЖИ ГАЗЬДЗИЦКИ
ВОЙЦЕХ ЯНУШ

СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ СПОСОБОВ УРАВНИВАНИЯ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Резюме

Уравнивание геодезических сетей методом наименьших квадратов считается самым лучшим в теоретическом смысле. Ввиду его трудоёмкости, появилось много приближенных способов, касающихся, между прочим, уравнивания полигонометрических сетей. Настоящая работа вкратце рассматривает приближенные способы уравнивания полигонометрии, известные в Польше, и приводит их классификацию, основанную на теоретических предпосылках. Большинство приближенных способов принадлежит к группе, характеризующейся двумя основными упрощениями по отношению к методу наименьших квадратов:

1. уравниваются функции наблюдений, а не наблюдения (напр. не углы и длины, а суммы углов и суммы приращений координат на отдельных ходах);

2. уравнивание не происходит одновременно по отношению ко всем функциям наблюдений, а отдельно для различных их типов (напр. отдельно суммы углов, отдельно суммы приращений координат).

К этой группе можно причислить способы: узловый, узлов Попова, полигонов Попова, эквивалентного обмена, последовательных приближений и другие. Вторая группа приближенных способов характеризуется применением только первого упрощения сравнительно с методом наименьших квадратов, с соблюдением одновременности уравнивания всех функций наблюдений. К этой группе принадлежат способы: обобщенный Попова и фиктивных наблюдений, разработанный в Институте Геодезии и Картографии авторами настоящего труда.

В дальнейшем приводится числовой пример, объясняющий способ проведения исследований точности отдельных приближенных способов. Некоторые полигонометрические сети уравновешены методом наименьших квадратов и приближенными способами. Принимая самыми вероятными результаты уравнивания, полученные методом наимень-

ших квадратов, достоинство данного приближенного способа оценивается на основании разностей η между значениями азимутов и узловых координат, полученных при помощи этого способа и метода наименьших квадратов. Эти разности выражают кратностями средней кв. ошибки m определения соответственной неизвестной методом наименьших квадратов. Таким образом, если некоторая неизвестная с средней кв. ошибкой m получила при уравнивании методом наименьших квадратов значение x_n , а по приближенному способу x_p , то критерием достоинства приближенного способа определения этой неизвестной, принимают:

$$\frac{x_n - x_p}{m} = \frac{\eta}{m}$$

Поскольку уравнивание сети позволяло определить $\frac{\eta}{m}$ для узловых координат и азимутов, в дальнейшем принято оценивать достоинство уравнивания определённым приближенным способом данной сети с W узлами, на основании величины:

$$\gamma_0 = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{\eta\eta}{mm} \right]}{3W}}$$

Результаты проведенных исследований привели к заключению о нецелесообразности применения метода наименьших квадратов для уравнивания полигонометрических сетей прокладываемых для целей не требующих особо высокой точности.

Как вывод из проведенных исследований, намечена область применения различных приближенных способов в зависимости от точности уравниваемых сетей.

JERZY GAŹDZICKI
WOJCIECH JANUSZ

A COMPARISON OF APPROXIMATE METHODS OF ADJUSTMENT OF POLYGON NETS

S u m m a r y

The adjustment of geodetic networks by the method of the least squares has been accepted theoretically as the most accurate. As it is very toilsome a great many approximate methods have appeared including the adjustment of polygon networks. The present paper discusses shortly the approximate methods of adjustment of polygon nets known in Poland. Their classification according to theoretical premisses is given. The majority of approximate methods belongs to a group characterized by two fundamental simplifications in relation to the least squares method:

1. The observation functions, and not the observations themselves are being adjusted (e. g. the angle sums and the sums of coordinate increases, but not angles and lengths).
2. The adjustment is not performed simultaneously to all the observation functions, but separately for particular kinds of observation functions (e. g. the angle sums are adjusted separately, and the sums of coordinate increases are also adjusted separately).

This group contains the node method, the Popov's node method, the Popov's polygon method, the equivalent exchange method, the subsequent approximation method, and many others.

The feature of the second group of approximate methods is the application only of the first simplification in relation to the least squares method, the simultaneity of adjustment of all functions of observation being respected. This group contains the generalized Popov's method and the fictitious observations method. These have been elaborated at the Institute of Geodesy and Cartography by the authors of the present paper.

In the further part of the paper a numerical example is given. It explains the way of carrying on the precision study of particular approximate methods. Several polygon nets have been adjusted by the methods of the least squares, and by the approximate methods. Assuming the re-

sults obtained by the least squares method as the most proper (most probable) the usefulness of a given approximate method has been considered on the basis of differences η between the azimuth values and node coordinates obtained by this method, and the least squares one. These differences have been expressed as multiples of the mean error m of determination of a corresponding unknown quantity by the method of least squares. If then, a certain unknown quantity bearing the mean error m obtained a value X in the method of the least squares, and the value x_p in the approximate method, the criterion of the usefulness of the approximate method in determining this unknown quantity is assumed to be

$$\frac{x_n - x_p}{m} = \frac{\eta_i}{m}$$

As the adjustment of the network allows to determine $\frac{\eta_i}{m}$ for node coordinates and azimuths, the evaluation of the adjustment usefulness of a given network comprising W nodes executed by a certain approximate method is effected on the basis of the quantity:

$$\gamma_{10} = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{\eta_i \eta_i}{m m} \right]}{3 W}}$$

The results of the performed studies have induced the authors to draw a conclusion on the superfluity of applying the method of the least squares for adjustment of the polygon nets not used for purposes requiring a specially high precision. As a corrolary from these studies some suggestions are given concerning the extent of applying particular approximate methods in dependence on the precision of networks to be adjusted.