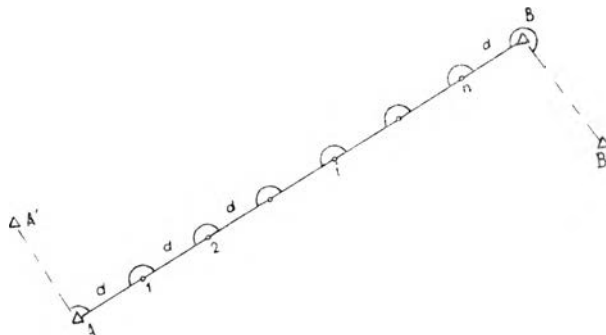


Wpływ nawiązań kątowych na zmniejszenie błędów podłużnych punktów typowego ciągu poligonowego

Praca ta została wykonana pod ogólnym kierunkiem prof. dra S. Hausbrandta; w przeprowadzeniu analiz rachunkowych wzięli udział inż. inż. J. Deryło, W. Janusz, A. Skorezyński.

1. Rozważmy ciąg poligonowy prostoliniowy i równoboczny, nawiązany na swoich krańcach do punktów i kierunków stałych (tzw. ciąg typowy).



Rys. 1

W literaturze geodezyjnej znane są wzory określające średnie błędy poprzeczny i podłużny *i*-tego punktu ciągu typowego:

$$m_{poprz.} = m_0 d \sqrt{\frac{i(i+1)(n+1-i)(n+2-i)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}} [(2i+1)n - (2i^2 - 2i - 3)] \dots (1)$$

$$m_{podl.} = m'_0 d \sqrt{\frac{i(n+1-i)}{n+1}} \dots (2)$$

w których użyto oznaczenia:

n — ilość punktów wyznaczanych,

*m*₀ — średni błąd pomiaru kąta załamania ciągu,

m'₀ = $\frac{m_d}{d}$ — błąd względny pomiaru długości boku,

m_d — średni błąd pomiaru długości boku,

d — długość boku.

Racjonalny stosunek błędów m_0 i m_0' charakteryzujących dokładność pomiarów kątowych i długościowych otrzymamy zakładając, że suma kwadratów błędów poprzecznych równa się sumie kwadratów błędów podłużnych punktów w danym ciągu poligonowym o n punktach:

$$\sum m_{\text{poprz.}}^2 = \sum m_{\text{podł.}}^2 \quad (3)$$

Stosunek ten wynosi¹:

$$s = \frac{m_0}{m_0'} = \sqrt{\frac{70(n+2)}{(n+4)(n^2+4n+9)}} \quad (4)$$

Wzór (4) pozwala nam obliczyć wartości stosunków dokładnościowych w zależności od liczby wyznaczanych punktów poligonu. Wielkość tych stosunków obrazuje zamieszczona poniżej tabelka:

n	2	4	6	8	10	12	14
$s = \frac{m_0}{m_0'}$	1.49	1.13	0.90	0.74	0.64	0.55	0.49

Przeprowadzimy porównanie teoretycznie uzasadnionych wartości stosunków dokładnościowych otrzymanych z założenia równości sumy kwadratów błędów podłużnych i poprzecznych z dokładnościami pomiarów kątowych i długościowych w przeprowadzanych obecnie pomiarach poligonizacji precyzyjnej. W poligonizacji I rzędu kąty mierzy się z maksymalnym błędem średnim $\pm 7,5''$, zaś długości z dokładnością większą niż 1 : 20 000. Odpowiednie dane dla poligonizacji II rzędu wynoszą: $\pm 12''$ i 1 : 12 000. Średnio można przyjąć ilość punktów wyznaczanych $n = 10$.

Stąd łatwo obliczymy stosunki dokładnościowe:

dla poligonizacji I rzędu $s_I = 0.24$

dla poligonizacji II rzędu $s_{II} = 0.23$

W tabelce dla $n = 10$ znajdziemy $s = 0.64$

Widać, że pomiary długościowe wykonuje się z dokładnością zbyt małą w stosunku do pomiarów kątowych. Wynika stąd bezpośrednio, że błędy podłużne są znacznie większe od błędów poprzecznych punktów poligonu.

¹ Wyprowadzenie wzorów na błędy poprzeczny i podłużny oraz na stosunek dokładnościowy s podane zostało w artykule prof. dra S. Hausbrandta: „Wzory na błąd średni dowolnego punktu w poligonie typowym...” zamieszczonym w kwartalniku „Geodezja i Kartografia”, tom II, zeszyt 1.

Jak wiadomo, kryterium dokładności wyznaczenia położenia punktu jest błąd punktu m_p obliczony z błędów wzdłuż osi współrzędnych m_x i m_y według wzoru:

$$m_p = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad (5)$$

Przyjmując oś x w kierunku poligonu otrzymamy:

$$m_x = m_{podl.}$$

$$m_y = m_{poprz.}$$

I dalej:

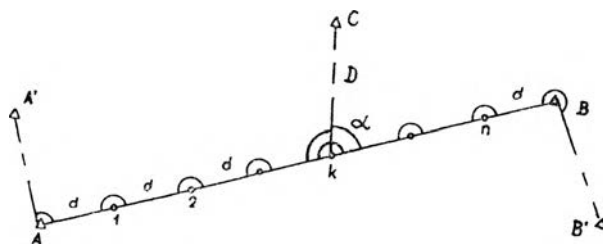
$$m_p = \pm \sqrt{m_{podl.}^2 + m_{poprz.}^2} \quad (6)$$

Różniczkując m_p względem $m_{podl.}$ i $m_{poprz.}$ dostaniemy:

$$dm_p = \frac{m_{podl.}}{m_p} dm_{podl.} + \frac{m_{poprz.}}{m_p} dm_{poprz.} \quad (7)$$

Wzór (7) wskazuje, że zmniejszenie błędu punktu powstałe przez zmniejszenie błędów poprzecznych i podłużnych zachodzi proporcjonalnie do wielkości tych błędów, a zatem podniesienie dokładności poligonizacji, w której błędy podłużne są znacznie większe od błędów poprzecznych powinno pójść po linii zmniejszenia błędów podłużnych, bowiem zmniejszenie błędów poprzecznych w niewielkim stopniu wpłynie na błędy punktów.

Zmniejszenie błędów podłużnych może być dokonane przez powiększenie dokładności pomiarów długościowych (dosyć trudne i kosztowne w obecnych warunkach technicznych), lub też przez usztywnienie podłużne poligonu nawiązaniem kątowym do punktów triangulacyjnych. Tym ostatnim zagadnieniem zajmiemy się bliżej.



Rys. 2

2. Przypuśćmy, że na k -tym punkcie poligonu typowego wykonano nawiązanie kątowe do punktu triangulacyjnego C znajdującego się w odległości D . Pomiarzenie dodatkowych kątów, według praw rachunku wyrównawczego, zmniejszy błędy poprzeczne i podłużne punktów poligonu. Wielkość tego zmniejszenia ustalimy poprzez obliczenie błędów poligonu nawiązanego i porównanie ich z błędami odpowiedniego poligonu typowego.

Do poszukiwanych błędów możemy dojść dwiema drogami: wyprowadzając wzory ogólne dla określonego typu poligonu, lub też wykonując analizy dokładnościowe, które choć mało efektowne i żmudne rachunkowo mają zasadniczą zaletę — mogą być stosowane do każdego zagadnienia wyrównawczego i dają się przeprowadzić według ustalonego schematu. W skrócie przypomnimy tok postępowania w analizach ciągów poligonowych:

1. Obliczenie współczynników przy niewiadomych pośredniczących w równaniach błędów² obserwacji kątowych:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_p & dy_p \\ -A_p & -B_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_p) & -(B_L - B_p) \end{vmatrix} + \alpha^{prz\ddot{y}bl.} - \alpha^{obs.} = v \quad (8)$$

i liniowych:

$$\begin{vmatrix} dx_i & dy_i \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_k & dy_k \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} + L^{prz\ddot{y}bl.} - L^{obs.} = w \quad (9)$$

przy użyciu wzorów:

$$A = \frac{\Delta x}{L^2}, \quad B = \frac{\Delta y}{L^2} \quad (10)$$

2. Sprowadzenie równań błędów do równoważności i jednorodności. (Dzielimy równania błędów stronami przez odpowiednie błędy średnie).

3. Zestawienie krakowianu współczynnikowego a zrównoważonego układu równań błędów.

4. Podniesienie krakowianu a do kwadratu, co jest równoznaczne ze znalezieniem krakowianu współczynnikowego układu równań normalnych.

5. Obliczenie elementów przekątnych odwrotności krakowianu a^2 (współczynników wagowych) określających błędy niewiadomych pośredniczących, a zatem błędy współrzędnych, według wzoru:

$$m_i = m_o \sqrt{(a^2)^{-1}_{i,i}} \quad (11)$$

m_i — błąd i -tej niewiadomej pośredniczącej.

m_o — błąd pojedynczego spostrzeżenia,

$(a^2)^{-1}_{i,i}$ — element krakowianu a^2 znajdujący się na przecięciu i -tego wiersza i i -tej kolumny.

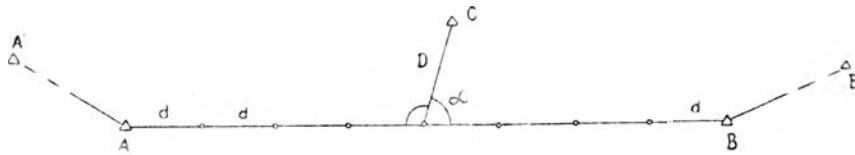
3. Zajmiemy się teraz rozważeniem szeregu szczególnych przypadków położenia punktu stałego C względem poligonu typowego (patrz rys. 2). Uzmiennimy występujące w zagadnieniu parametry, a więc kąt α który tworzy celowa nawiązująca z osią ciągu, stosunek długości celo-

² Równanie błędów wypisano przy użyciu pojęcia form rachunkowych. Oznaczenie przyjęto według podręcznika prof. dra S. Hausbrandta: „Rachunki geodezyjne“

wej nawiązującej do długości boku $\frac{D}{d}$, ilość punktów wyznaczanych n , wreszcie zmienić będziemy rodzaj nawiązania, badając jaki to wywrze wpływ na wielkość błędów. We wszystkich analizach założymy stosunek dokładnościowy poligonu $\frac{m_o}{m_s} = \frac{1}{4}$, co dosyć ściśle odpowiada obowiązującym przepisom poligonizacji precyzyjnej.

Rozpatrywane będą następujące rodzaje nawiązań:

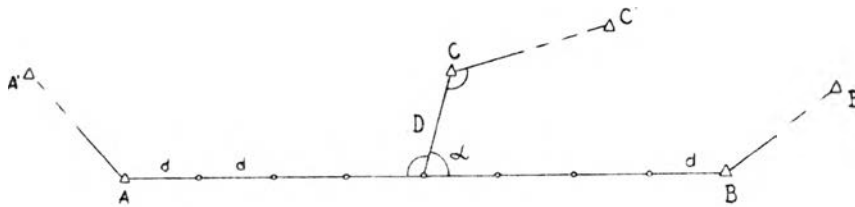
I rodzaj



Rys. 3

Dodatkowo pomierzone są 2 kąty na punkcie środkowym.

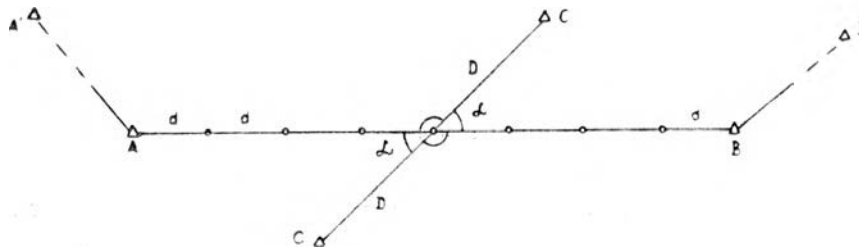
II rodzaj



Rys. 4

Dodatkowo pomierzone są 3 kąty: dwa na punkcie środkowym, trzeci na punkcie stałym C.

III rodzaj



Rys. 5

Dodatkowo pomierzone są 4 kąty na punkcie środkowym. Punkty stałe C i C' położone są symetrycznie w stosunku do punktu środkowego.

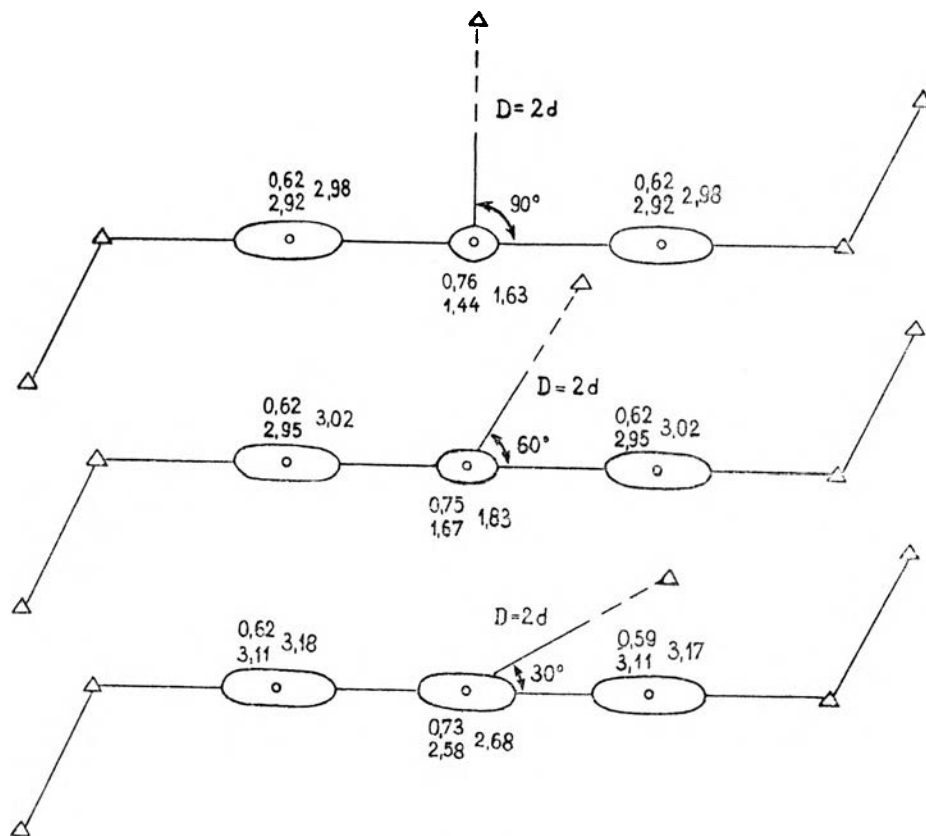
Wyniki analiz zilustrujemy schematycznie na szkicach poligonów przy pomocy elips o półosiach równych wartościom średnich błędów podłuż-

nych i poprzecznych. Przy elipsach, wykreslonych w jednakowej skali³ wypisane będą liczbowe wartości stosunków:

$$\frac{m_{\text{popr.}}}{m_o d} \quad \frac{m_p}{m_o d}$$

$$\frac{m_{\text{podl.}}}{m_o d}$$

z zachowaniem stale tego samego porządku opisu.

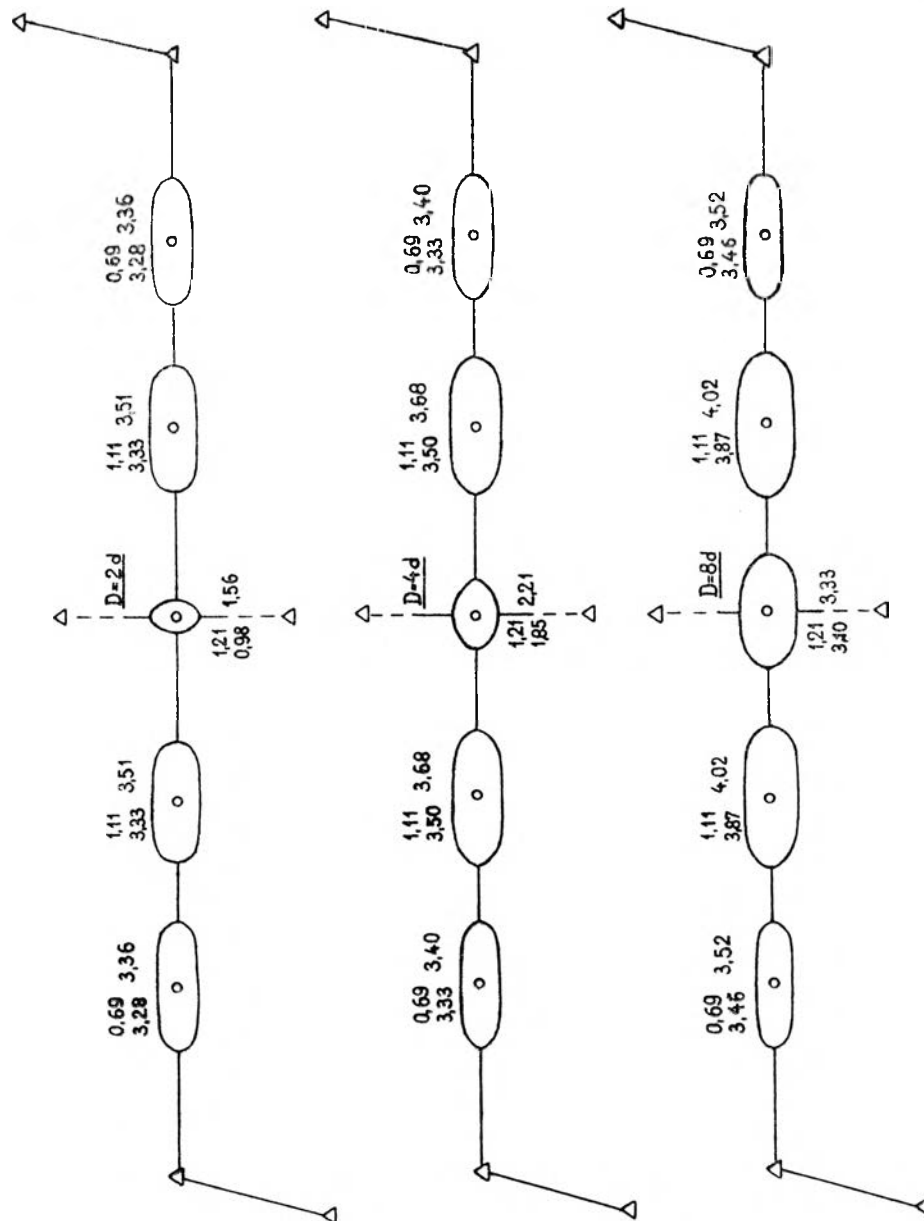


Rys. 6

Rysunek 6 przedstawia błędy trzypunktowego poligonu o nawiązaniu I rodzaju przy różnych wartościach kąta α . Założono $\frac{D}{d} = 2$. Interesujące nas błędy podłużne są najmniejsze w poligonie 6a, możemy zatem przyjąć, że optymalnym przypadkiem jest nawiązanie prostopadłe.

³ Ze względów praktycznych elipsy poligonów trzynastopunktowych wykreslono w skali mniejszej niż elipsy pozostałych poligonów.

Na rysunku 7 pokazano błędy pięciopunktowego poligonu o prostopadłym nawiązaniu III rodzaju przy różnych wartościach stosunku $\frac{D}{d}$

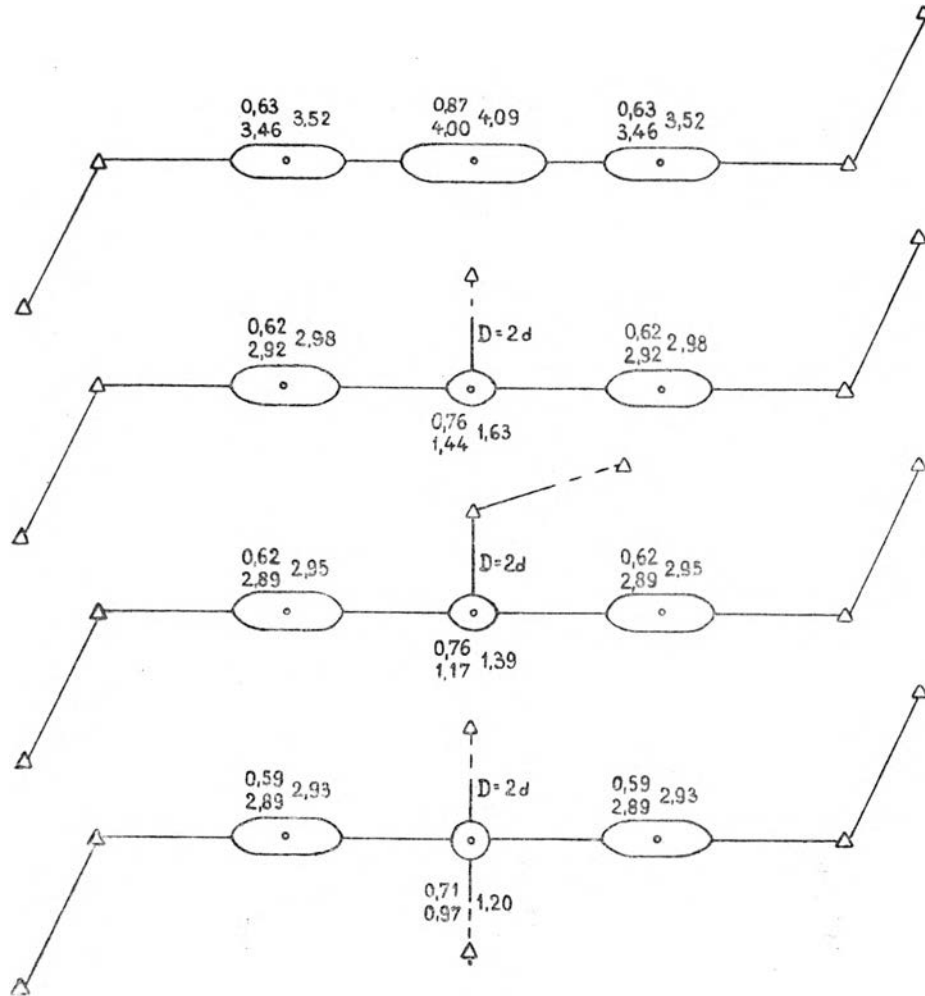


Rys. 7

Rysunki 8, 9 i 10 obrazują błędy punktów poligonów nawiązanych prostopadle w zależności od rodzaju nawiązania. W celach porównaw-

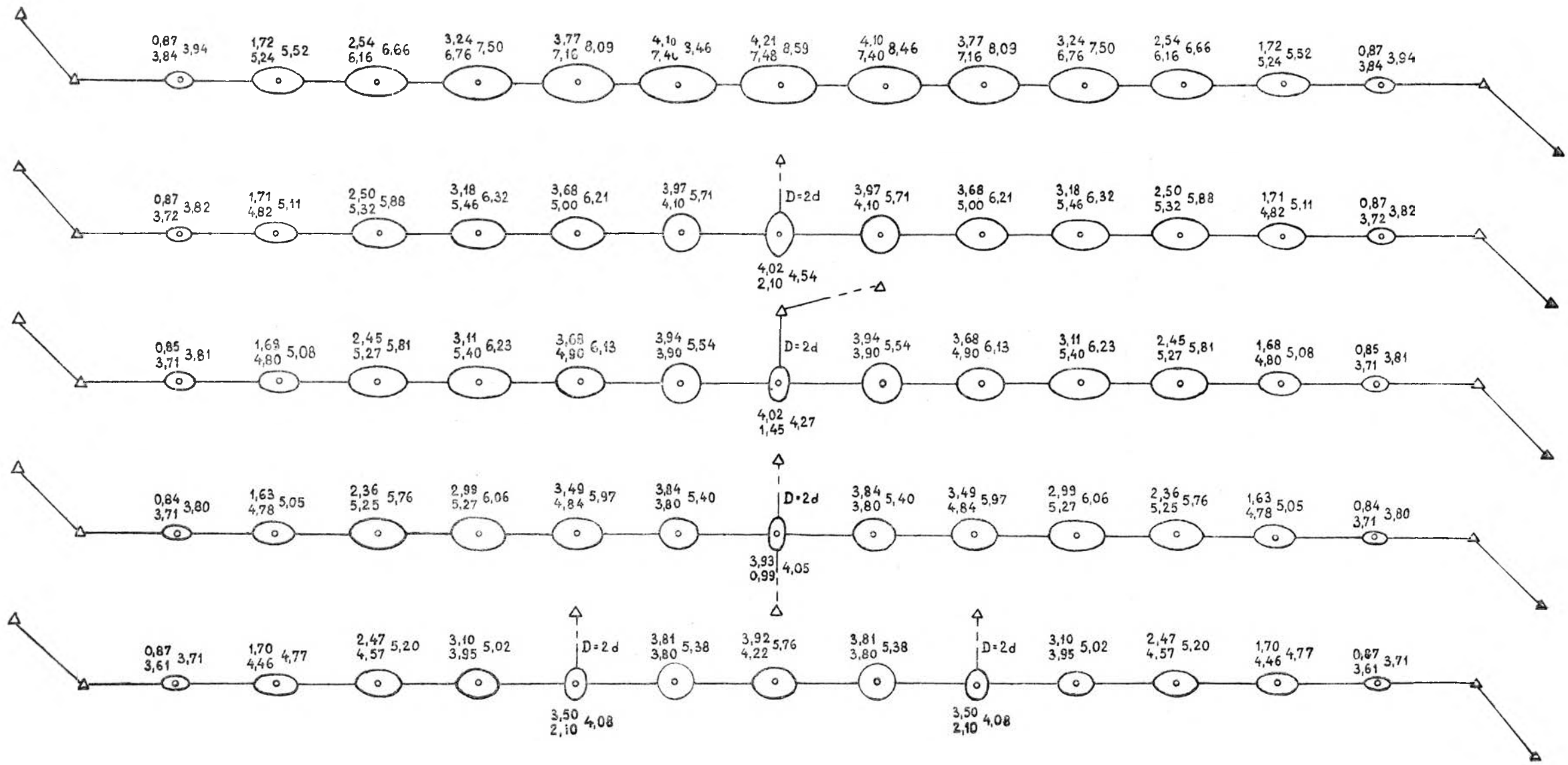
czych przedstawiono poligony typowe. Prócz tego podany został trzynastopunktowy poligon o podwójnym nawiązaniu I rodzaju wykonanym na punktach 5 i 9 (rys. 10). Założono $\frac{D}{d} = 2$.

Zamieszczony materiał analityczny pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków:



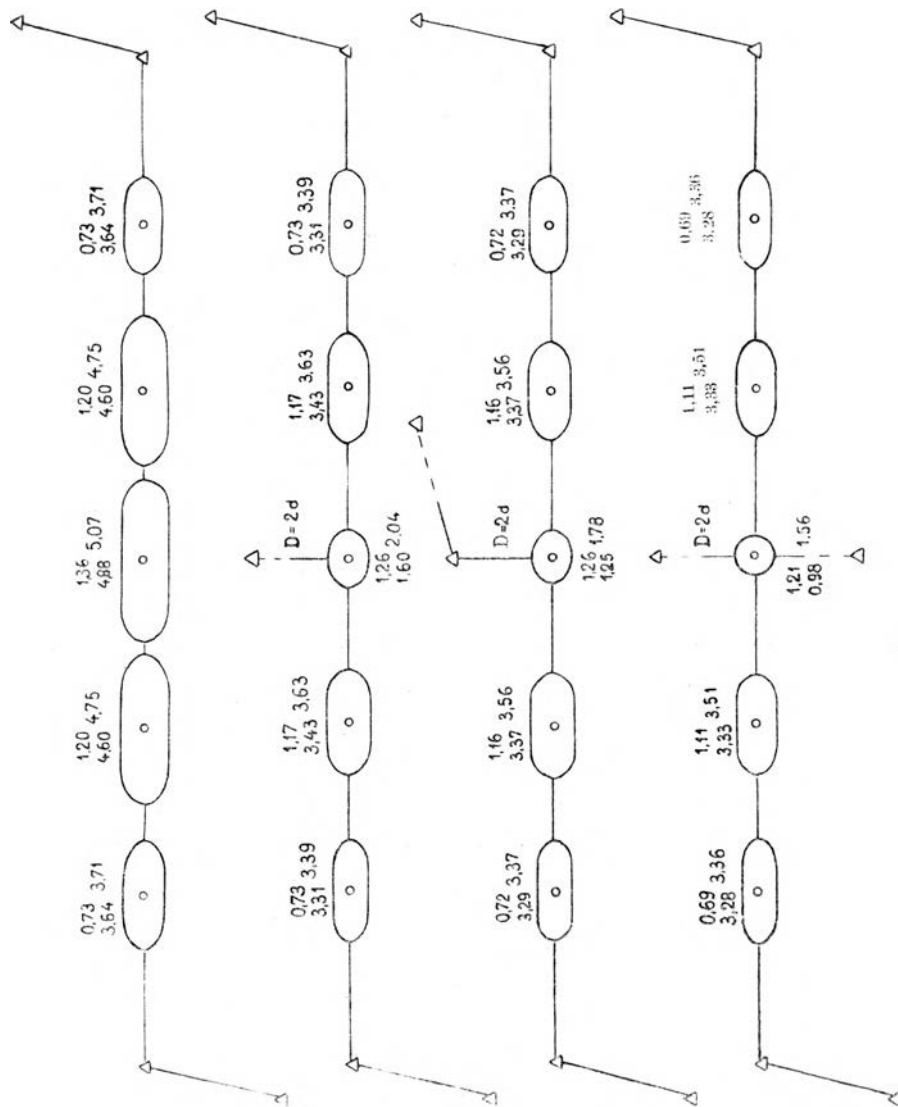
Rys. 8

1. Prostopadłe nawiązania kątowe w znacznym stopniu zmniejszają błędy podłużne punktów poligonu.
2. Odchylenie celowej nawiązującej od prostopadłości w stosunku do osi poligonu powoduje zmniejszenie wpływu nawiązania.
3. Wzrost długości celowej nawiązującej powoduje zmniejszenie wpływu nawiązania.



Rys 10

4. Najkorzystniejsze jest nawiązanie III rodzaju, najmniej korzystne I rodzaju, jednakże różnice między nimi są niewielkie.
5. Zmniejszenie błędów jest największe na punkcie nawiązania oraz na punktach sąsiednich.
6. Wpływ nawiązań katowych na błędy poprzeczne jest znikomy

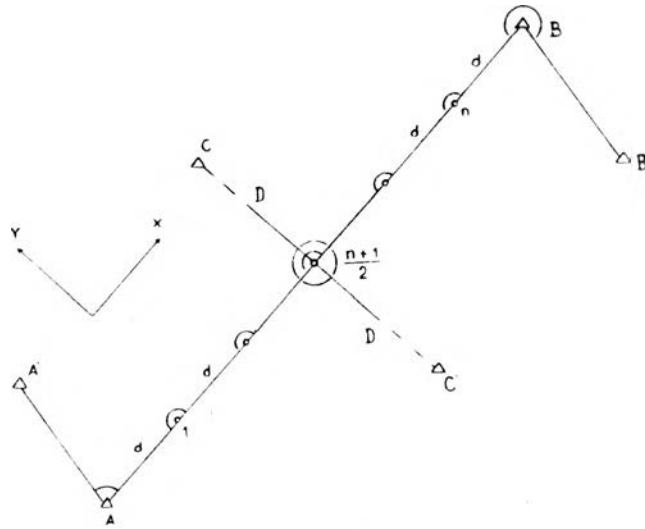


Rys. 9

Dla uniknięcia nieporozumień należy podkreślić, że powyższe wnioski są słuszne dla poligonizacji, w której pomiary katowe są wykonywane z dużo większą dokładnością niż długościowe. Temu warunkowi odpo-

wiada większość przeprowadzanych obecnie prac poligonizacyjnych, głównie ze względu na łatwość uzyskania wysokiej dokładności pomiarów kątowych przy użyciu nowoczesnych teodolitów.

4. Dla typowych ciągów poligonowych o prostopadłym nawiązaniu III rodzaju łatwo jest wyprowadzić wzór ogólny na błąd podłużny i -tego punktu.



Rys. 11

Założmy, że ilość n wyznaczanych punktów jest nieparzysta, zaś oś x układu współrzędnych jest równoległa do osi poligonu. Niech t oznacza stosunek długości celowej nawiązującej do długości boku poligonu:

$$t = \frac{D}{d} \quad \dots \dots \dots (12)$$

a s , jak poprzednio, stosunek dokładnościowy poligonu:

$$s = \frac{m_0}{m'_0} \quad \dots \dots \dots (13)$$

Opierając się na wzorach (8) — (10) zestawimy tabelę współczynników przy niewiadomych pośredniczących (patrz tab. I) w $n + 1$ równaniach błędów obserwacji liniowych oraz w $n + 6$ równaniach błędów obserwacji kątowych — prócz $n + 2$ obserwacji kątów załamania mamy 4 obserwacje kątów nawiązania na punkcie środkowym. Z tabeli tej przejdziemy do tabeli wyznacznika charakterystycznego układu równań normalnych Gaussa Δ , przedstawionej w tab. II. Dla uproszczenia każdy element tabeli pomnożono przez d^2 . Rachunki wykonano przyjmując błąd jednostkowy równy m'_0 .

Tabela współczynników przy niewiadomych pośredniczących w równaniach błędów

	x_1	x_2	x_3	\dots	$\frac{x_{n+1}}{2} - 1$	$\frac{x_{n+1}}{2}$	$\frac{x_{n+1}}{2} + 1$	\dots	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n	y_1	y_2	y_3	\dots	$\frac{y_{n+1}}{2} - 1$	$\frac{y_{n+1}}{2}$	$\frac{y_{n+1}}{2}$	\dots	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
równania błędów obserwacji liniowych																						
1	1																					
2	-1	1																				
3		-1	1																			
			-1	1																		
					1																	
					-1	1																
						-1	1															
								1														
								-1	1													
n									-1	1												
$n+1$											-1	1										
													-1									
równania błędów obserwacji kątowych																						
1												$-\frac{1}{d}$										
2												$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$									
3												$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$								
													$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$								
														$-\frac{1}{d}$	$\frac{1}{d}$							
															$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$						
															$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$					
																$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$				
																	$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$			
																		$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$		
n																			$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$	
$n+1$																			$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	$-\frac{1}{d}$	
$n+2$																				$-\frac{1}{d}$	$\frac{2}{d}$	
$n+3$																					$\frac{1}{D}$	
$n+4$																					$-\frac{1}{D}$	
$n+5$																					$-\frac{1}{D}$	
$n+6$																					$\frac{1}{D}$	

Przeprowadzając podobne, choć nieco bardziej skomplikowane pod względem rachunkowym obliczenia otrzymamy podwyznacznik $\Delta'_{i,i}$:

$$\Delta'_{i,i} = d^{-2n+2} i \left[(n-i+1) + \frac{n+1}{s^2 t^2} (n+1-2i) \right] \quad \text{przy } i < \frac{n+1}{2} \quad (22)$$

$$\Delta'_{i,i} = d^{-2n+2} (n-i+1) \left[i - \frac{n+1}{s^2 t^2} (n+1-2i) \right] \quad \text{przy } i \geq \frac{n+1}{2}$$

Bez trudności obliczymy teraz współczynnik wagowy

$$\frac{\Delta'_{i,i}}{\Delta} = d^2 \frac{i \left[(n-i+1) + \frac{n+1}{s^2 t^2} (n+1-2i) \right]}{(n+1) \left(1 + \frac{n+1}{s^2 t^2} \right)} \quad \text{przy } i < \frac{n+1}{2} \quad (23)$$

$$\frac{\Delta'_{i,i}}{\Delta} = d^2 \frac{(n-i+1) \left[i - \frac{n+1}{s^2 t^2} (n+1-2i) \right]}{(n+1) \left(1 + \frac{n+1}{s^2 t^2} \right)} \quad \text{przy } i \geq \frac{n+1}{2}$$

oraz błąd podłużny i -tego punktu:

$$m_i = m'_0 d \sqrt{\frac{i \left[(n-i+1) + \frac{n+1}{s^2 t^2} (n+1-2i) \right]}{(n+1) \left(1 + \frac{n+1}{s^2 t^2} \right)}} \quad \text{przy } i < \frac{n+1}{2} \quad (24)$$

$$m_i = m'_0 d \sqrt{\frac{(n-i+1) \left[i - \frac{n+1}{s^2 t^2} (n+1-2i) \right]}{(n+1) \left(1 + \frac{n+1}{s^2 t^2} \right)}} \quad \text{przy } i \geq \frac{n+1}{2}$$

W przypadku $i = \frac{n+1}{2}$ tj. dla punktu środkowego otrzymamy:

$$m_{\frac{n+1}{2}} = \frac{m'_0 d}{2} \sqrt{\frac{n+1}{1 + \frac{n+1}{s^2 t^2}}} \quad (25)$$

Z postaci ostatniego wzoru, szczególnie łatwego do interpretacji, wiadać, że błąd podłużny środkowego punktu rośnie wraz ze wzrostem wartości parametrów s i t , w szczególności przy:

$$t = \frac{D}{d} \rightarrow \infty$$

błąd podłużny staje się taki sam, jaki byłby, gdyby nawiązania kątowego nie dokonano.

Stwierdzona zależność między błędami podłużnymi i parametrem s wyraża intuicyjnie oczywisty fakt, że wpływ nawiązań kątowych jest tym większy, im dokładniejsze są pomiary kątowe w stosunku do linio-
wych.

Wzory (24) — (25) mogą znaleźć zastosowanie przy projektowaniu ciągów poligonowych o prostopadłym nawiązaniu III rodzaju, a także — ze względu na małe różnice w ostatecznym efekcie dokładnościowym między poszczególnymi rodzajami nawiązań — o nawiązaniu I i II rodzaju.

Przeprowadzone rozważania wskazują na celowość stosowania prostopadłych nawiązań kątowych w równobocznym i prostoliniowym ciągu poligonowym, w którym pomiary kątowe wykonane zostały z dokładnością znacznie większą niż długościowe.

Postawienie założeń upraszczających w stosunku do ciągu poligonowego o jego prostoliniowości i równobocznosci jest niezbędne przy matematycznym ujęciu zagadnienia. Zresztą słusznym wydaje się analizowanie spośród nieskończonej ilości różnorodnych poligonów poligonu typowego, którego wystąpienie ze względu na świadomą dążność projektanta, jest najbardziej prawdopodobne, tak jak najbardziej prawdopodobne jest wystąpienie błędu przypadkowego o wartości zerowej. Stosowanie wysuniętych tu wniosków odnośnie ciągów zbliżonych swym kształtem do ciągu typowego jest w pełni usprawiedliwione i ogólnie przyjęte w literaturze geodezyjnej.

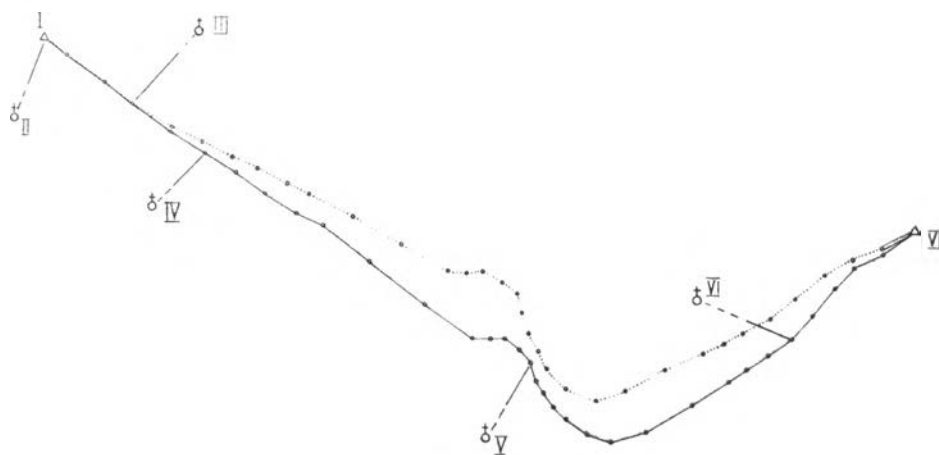
Prostopadłość nawiązania, niewątpliwie trudna do uzyskania w warunkach polowych, nie powinna być traktowana zbyt dosłownie. Odchylenia w granicach kilkunastu stopni nie mają znaczenia.

5. Jedynym dostępnym obecnie przykładem wziętym z praktyki geodezyjnej i charakteryzującym wpływ nawiązań kątowych jest 32-punktowy poligon pomierzony i wyrównany przez Państwowe Przedsiębiorstwo Geodezyjne. Poligon ten (patrz rys. 12) nawiązano na początku do punktów triangulacyjnych I i II, zaś na końcu pomierzono azymut astronomiczny i nawiązano do punktu VII. Dodatkowo wykonane zostały nawiązania kątowe do punktów triangulacyjnych III, IV, V i VI.

W pierwszym rzędzie przeprowadzono wyrównanie przybliżone, wyrównując oddzielnie kąty i współrzędne, przy czym nie były uwzględnione dodatkowe nawiązania kątowe. Następnie wyrównano poligon według metody najmniejszych kwadratów. To powtórne wyrównanie objęło wszystkie pomiary nawiązujące.

W rezultacie okazało się, że po drugim wyrównaniu punkty poligonowe uległy znacznemu przesunięciu w stosunku do wyników pierwszego wyrównania. Przesunięcia te, dochodzące w środku poligonu do 30 cm, nie mogą być wytłumaczone przez zastosowanie dwóch rodzajów wyrównania, zwłaszcza że pomiar poligonowy wykonano z wysoką dokładnością. Należy przyjąć, że mamy tu do czynienia z wpływem dodatko-

wych nawiązań kątowych. Oczywiście, współrzędne otrzymane po drugim wyrównaniu uwzględniającym dodatkowe nawiązania kątowe, są „lepsze”, bardziej prawdopodobne.



Rys. 12

Liniami kropkowanymi narysowano poligon według wyników pierwszego wyrównania, ciągłymi — według drugiego.

Skala poligonu kropkowanego: 1 : 150 000.

Skala przesunięć punktów: 1 : 20.

ЕЖИ ГАЗДЗИЦКИ

ВЛИЯНИЕ УГЛОВЫХ ПРИВЯЗОК НА УМЕНЬШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ОШИБОК В ТИПОВОМ ПОЛИГОННОМ ХОДЕ

Резюме

Повышение точности определения положения точек прямолинейного полигонного хода с равными сторонами, с привязкой на обоих концах можно получить при помощи добавочных угловых привязок к твердым точкам. В работе даны результаты ряда вычислительных анализов, которые позволяют сделать следующие заключения:

1. Угловые привязки в большой степени уменьшают продольные ошибки точек полигонного хода.
2. Самой выгодной является привязка под прямым углом к оси полигонного хода; уклонение связывающего направления от перпендикулярности влечет за собой уменьшение влияния привязки.
3. Увеличение расстояния между связываемой и твердой точками влечет за собой уменьшение влияния привязки.
4. Влияние угловых привязок на поперечную невязку незначительное. В анализах принято что отношение точности

$$s = \frac{m_o}{m'_o} = \frac{1}{4}$$

где m_o — погрешность измерения угла в полигонном ходе, m'_o — относительная погрешность измерения длины стороны полигонного хода.

В случае перпендикулярной привязки к двум твердым точкам расположенным симметрично к середине полигонного хода, справедлива общая формула:

$$m_{\frac{n+1}{2}} = \frac{m'_o d}{2} \sqrt{\frac{n+1}{1 + \frac{n+1}{s^2 l^2}}}$$

где обозначают:

$m_{\frac{n+1}{2}}$ — продольная погрешность точки в середине полигонного хода с n определяемыми точками

d — длина стороны полигонного хода,

l — отношение расстояния между связываемой и твердой точками к длине стороны полигонного хода.

Приведенная формула применима при проектировании полигонных ходов.

JERZY GAZDZICKI

THE INFLUENCE OF ANGULAR CONNECTIONS UPON THE REDUCTION OF LONGITUDINAL ERRORS OF POINTS OF A TYPICAL POLYGONAL TRAVERSE

S u m m a r y

A more accurate determination of the position of points of a straight-lined, equilateral polygonal traverse connected both ways may be obtained through additional angular connections with fixed points.

Results of a number of computation analyses quoted in the paper allow for the following conclusions:

1. Angular connections reduce the longitudinal errors of polygonal points in a considerable degree.
2. A connection at the right angle to the axis of the polygon is most advantageous; any deviation of the connecting sight line from orthogonality results in a diminution in the influence of the connection.
3. The longer the connecting sight line the smaller the influence of the connection.
4. The influence of angular connections upon lateral errors is slight.

The analyses were made with the assumption that the relation $s = \frac{m_o}{m'_o}$: $\frac{1}{4} m_o$ was the error of the measurement of the angle of the refraction of the traverse while m'_o the relative error of the measurement of the length of the side of the traverse.

In case of orthogonal connection with two fixed points symmetrically situated with respect to the central point of the traverse to be connected the following general formula is valid

$$\frac{m_{n+1}}{2} = \frac{m'_o d}{2} \sqrt{\frac{n+1}{1 + \frac{n+1}{s^2 l^2}}}$$

where $\frac{m_{n+1}}{2}$ is the longitudinal error of the central point of a polygon of n points to be determined;

d is the length of a side of the polygon;

t is the relation of the length of the connecting sight line to that of a side of the polygon;

The formula adduced may be applied when polygonal traverses are drawn.

